Taurida National V. Vernadsky University
Branch of Moscow State University in Sevastopol
Crimea Scientific Center of Ukrainian NAS
Crimea Mathematical Foundation
Crimea Academy of Sciences

International Conference
Международная конференция

KROMSH-2012

The Twenty Third Crimea Autumn Mathematical School
Двадцать Третья Крымская Осенняя Математическая Школа

BOOK OF ABSTRACTS

СБОРНИК ТЕЗИСОВ

Crimea, Laspi-Batiliman, September 17-29

2012

www.kromsh.info

Крымская Осенняя Математическая Школа (КРОМШ-2012).
Crimean Autumn Mathematical School (KROMSH-2012).
Двадцать третья ежегодная международная конференция. Тезисы докладов. – Симферополь: издательство КНЦ НАНУ, 2012. – 90 с.

Организационный комитет:

Программный комитет:

Редакционный совет:

О линейном непрерывном правом обратном к оператору свертки

Абанина Д.А.

Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия),
Южный математический институт ВНЦ РАН (Владикавказ, Россия)

Рассматривается весовое пространство бесконечно дифференцируемых функций на конечном интервале. Для сюръективного оператора свертки в этом пространстве полностью решена задача о существовании линейного непрерывного правого обратного. Соответствующее необходимое и достаточное условие формулируется в терминах нулей символа оператора. Как частный случай изучены дифференциальные операторы конечного и бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Результат иллюстрируется примерами положительного и отрицательного характера.

Разные типы сходимости случайных процессов на конечномерных и бесконечномерных многообразиях

Азарина С.В.

Воронежский государственный технический университет (Воронеж, Россия)

Рассматриваются случайные процессы, которые являются решениями дифференциальных уравнений с производными в среднем на многообразии. При исследовании вопроса о существовании решения включения с производными в среднем или включения для генератора случайного процесса, возникает необходимость изучения сходимости процессов, полученных для аппроксимаций правых частей указанных включений. Целью работы является исследование возможных типов сходимости указанных процессов и свойств предельного процесса. Особый случай представляет исследование сходимости на бесконечномерном многообразии (рассматривается многообразие отображений).

Об устойчивости импульсной системы в критическом случае

Анашкин О.В.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского
(Симферополь, Украина)

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \neq \tau_k, \quad x(\tau_k + 0) = h_k(x(\tau_k)),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$, $\tau_k \to \infty$, $f(t,0) = h_k(0) = 0$. Функции $f(t,x)$ и $h_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица по x в некоторой окрестности нуля равномерно по t и $k = 1, 2, \ldots$.

Импульсные системы моделируют динамические процессы, подвергающихся в определенные моменты времени воздействиям, продолжительность которых очень мала и можно допустить, что вектор фазовых переменных изменяется мгновенно. Решения импульсных систем имеют в точках τ_k разрывы первого рода. Определение устойчивости решений импульсной системы с фиксированными моментами импульсного воздействия вводится естественным образом и буквально повторяет классическое определение для обыкновенных дифференциальных уравнений. Прямой метод Ляпунова является основным инструментом исследования устойчивости решений нелинейных импульсных систем. Разрывный характер решений таких систем делает естественным использование разрывных функций Ляпунова с разрывами по времени в моменты импульсного воздействия.

Предполагается, что матрицант системы линейного приближения в нуле ограничен вместе с обратным. Таким образом имеет место критический случай теории устойчивости. В терминах свойств разрывных функций Ляпунова формулируются теоремы об устойчивости и неустойчивости в некоторых критических случаях. Приведены примеры построения подходящих функций Ляпунова.

Представленные в докладе результаты получены совместно с О.В. Митько.

Качество аппроксимации сверточными интегралами в терминах обобщенных модулей гладкости

Артамонов С.Ю.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Севастополе (Севастополь, Украина)

В работе рассматриваются непериодические функции, определенные на всей числовой прямой, суммируемые в p-ой степени ($1 \le p \le +\infty$). В этом случае класс тригонометрических полиномов в качестве класса аппроксимирующих функций уже не пригоден и его естественно заменить более обширным классом всех целых функций экспоненциального типа [1].

Рассматриваются т.н. сверточные интегралы $M_\sigma^{(\phi)}(f;x)$, являющиеся непериодическим аналогом средних Фурье в тригонометрическом случае [2],[3].

$$M_\sigma^{(\phi)}(f;x) \,:=\, (2\pi)^{-1}\left(f * K_\sigma^\phi\right)(x) \,=\, (2\pi)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x+h)\, K_\sigma^\phi(h)\, dh\ ,$$

где ядро $K_\sigma^\phi(h) \,:=\, F\left[\phi\left(\frac{\cdot}{\sigma}\right)\right](h)$ (F- преобразование Фурье) порождается четной, непрерывной функцией $\phi(\cdot)$, имеющей компактный носитель и удовлетворяющей условию $\phi(0) = 1$ (ϕ наз. генератором сверточных интегралов).

В работе доказывается эквивалентность аппроксимационной ошибки сверточных интегралов $\|f - M_\sigma^{(\phi)}(f)\|_p$ и обобщенного модуля гладкости

$$\omega_\theta(f,\delta)_p \,=\, \sup_{0\le h\le\delta}\left\| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \theta^\wedge(k) f(x+kh)\right\|_p,\ \delta \ge 0\,,$$

где $\theta(\cdot)$ – непрерывная, 2π-периодическая функция, удовлетворяющая условиям: $\theta(0) = 0$, $\theta^\wedge(0) = -1$, $\theta(-\cdot) \,=\, \overline{\theta(\cdot)}$ и $\sum\limits_{\nu\in\mathbb{Z}} |\theta^\wedge(\nu)| \,<\, +\infty$. ($\theta$ наз. генератором модуля гладкости).

Результаты сформулированы в терминах генераторов сверточных интегралов и обобщенных модулей гладкости.

Список литературы

[1] Н.И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* Москва, Наука, 1965 г., 408 стр.

[2] Z. Burinska, K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *On the approximation by generalized sampling series in Lp-metrics.* Sampling Theory in Signal and Image Proc. (STSIP), 5, no. 1 (2006), 59 – 87.

[3] Z. Burinska, K. Runovski, H.-J. Schmeisser, *On quality of approximation by families of generalized sampling series*. Sampling Theory in Signal and Image Proc. (STSIP), 8, no. 2 (2009), 105 – 126.

Сингулярные интегральные уравнения с ядром Гильберта и монотонной нелинейностью

Асхабов С.Н.

Чеченский государственный университет (Грозный, Россия)

Найдены условия на заданные функции и параметры, при которых сингулярные интегральные операторы общего вида с ядром Гильберта обладают свойствами положительности и строгой положительности в вещественных пространствах Лебега. Используя эти свойства доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности, оценках и способах нахождения решения для трех различных классов нелинейных сингулярных интегральных уравнений в пространствах Лебега с общим весом. При этом, в частности, обобщаются некоторые результаты H. Amann, автора, L.v. Wolfersdorf и других.

Об антикоммутируемости самосопряженных измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана[1]

Ахрамович М.В., Муратов М.А.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

В работе рассматривается антикоммутируемость пары неограниченных самосопряженных измеримых операторов, присоединенных к произвольной алгебре фон Неймана.

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $S(\mathcal{M})$ — $*$-алгебра всех измеримых относительно $\mathcal{M}$ операторов.

Говорят, что два самосопряженных оператора T и S, действующих в $\mathcal{H}$, *антикоммутируют*, если для всех $0 \leq l, m < \infty$ антикоммутируют ограниченные операторы

$$T_l = \int\limits_{-l}^{+l} \lambda dE_T(\lambda),\ S_m = \int\limits_{-m}^{+m} \mu dF_S(\mu):$$

$$T_l S_m + S_m T_l = 0,$$

где $\{E_T(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, $\{F_S(\mu)\}_{\mu\in\mathbb{R}}$ — спектральные семейства ортопроекторов операторов T и S, соответственно.

Теорема 1. Пусть T, S — самосопряженные измеримые операторы из $S(\mathcal{M})$. Если операторы TS и $-ST$ совпадают на любом сильно плотном подпространстве $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D} = \mathcal{D}(TS)\cap\mathcal{D}(ST)$, то операторы T и S антикоммутируют в алгебре $S(\mathcal{M})$:

$$T \cdot S = -S \cdot T.$$

Теорема 2. Для того, чтобы два самосопряженных оператора $T, S \in S(\mathcal{M})$ антикоммутировали, необходимо и достаточно, чтобы они антикоммутировали как элементы алгебры $S(\mathcal{M})$.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект № 40.1/008

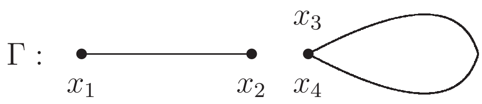
Граничная тройка для модельного квантового графа с петлёй

Ашурова Э.Н., Кандагура А.Н.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

В данной работе построена граничная тройка для некоторого семейства самосопряжённых операторов Лапласа с определёнными граничными условиями.

Пусть заданы два отрезка вещественной прямой $[x_1, x_2]$ и $[x_3, x_4]$, которые мы изобразим в виде графа:



Будем предполагать граф квантовым.

В пространстве $L_2(X) = L_2[x_1, x_2] \oplus L_2[x_3, x_4]$ рассматривается семейство операторов Лапласа

$$A_{\alpha,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2},$$

области определения $\mathrm{dom}(A_{\alpha,\beta})$ которых состоят из функций $f \in W^{2,2}(X) = W^{2,2}[x_1, x_2] \oplus W^{2,2}[x_3, x_4]$, удовлетворяющих следующим граничным условиям:

(i) $f(x_1) + \alpha f'(x_1) = 0,\ \alpha \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x_3) = f(x_4)$;

(iii) $f(x_2) = \beta f(x_3),\ \beta \in \mathbb{R}$;

(iv) $f'(x_3) - f'(x_4) - \beta f'(x_2) = 0$.

Для данного семейства операторов $\{A_{\alpha,\beta}\}$ построен симметрический оператор $A_{\min}$ такой, что каждый оператор этого семейства является его собственным расширением.

Граничную тройку $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ для оператора $A^*_{\min}$, относительно которой все операторы $A_{\alpha,\beta}$ являются почти разрешимыми, можно выбрать следующим образом:

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^3,$$

$$\Gamma_0 f = \Big(-f'(x_1), f'(x_2), f(x_3)\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$\Gamma_1 f = \Big(f(x_1), f(x_2), f'(x_3) - f'(x_4)\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Операторы высшего порядка с периодическими коэффициентами

Баданин А.В.

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В.Ломоносова (Архангельск, Россия)

Рассматривается самосопряженный дифференциальный оператор N-го ($N \geq 3$) порядка с периодическими коэффициентами на вещественной оси. Спектр оператора абсолютно непрерывен и либо заполняет всю ось (в случае нечетного N), либо состоит из конечного или бесконечного числа интервалов, отделенных лакунами (в случае четного N). Спектр, с учетом кратности, описывается в терминах некоторых аналитических функций, аналогичных стандартной функции Ляпунова для оператора Хилла. Изучаются свойства этих функций. Вычисляются асимптотики спектра при больших значениях спектрального параметра. Исследуется спектр при малых коэффициентах. Отдельно обсуждаются случаи $N = 3$ и $N = 4$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы Минобрнауки РФ, ГК № 14.740.11.0581

Условие Липшица для метрической проекции и антипроекции в гильбертовом пространстве над $\mathbb{R}$

Балашов М.В.

Московский физико-технический институт (Москва, Россия)

1. В докладе будут охарактеризованы выпуклые замкнутые множества в гильбертовом пространстве, для каждого из которых оператор метрического проектирования на множество удовлетворяет условия Липшица с константой Липшица $L \in (0, 1)$ на дополнении к некоторой окрестности данного множества.

2. В докладе будут охарактеризованы выпуклые замкнутые множества в гильбертовом пространстве, для каждого из которых оператор метрического антипроектирования на множество (ставящий в соответствие точке пространства точки множества, наиболее удаленные от данной точки пространства) одноточечный и удовлетворяет условию Липшица на дополнении к некоторой окрестности данного множества.

Получены точные оценки геометрических характеристик такого множества в зависимости от размера окрестности множества и константы Липшица оператора (анти)проектирования.

О нелинейной задаче фильтрации с неизвестной подвижной границей

Балашова Г.С.

Московский энергетический институт (Москва, Россия)

Дается краткое представление о постановке и численном исследовании двумерной (по числу пространственных переменных) нелинейной начально–краевой задачи о движении газового объема в водоносном ограниченном пласте – неоднородном в горизонтальных направлениях и с достаточно герметичными кровлей и подошвой (высота пласта не учитывается). Давление в газовом "пузыре" считается не зависящим от пространственных координат ввиду малой вязкости газа по сравнению с вязкостью воды в пласте. Сжимаемость воды в пласте и деформируемость пористой среды учитываются.

Пусть неизвестная подвижная граница газ–вода и внешняя граница заданы в полярной системе координат (r, φ) уравнениями $r = \xi(\varphi, t)$ и $r = R(\varphi, t)$ соответственно, где $\xi(\varphi, t)$ и $R(\varphi, t)$ – достаточно гладкие функции. Задача состоит в нахождении функций $\xi(\varphi, t)$ и $P(r, \varphi, t)$ ($P(r, \varphi, t)$ – давление в водной части), удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{m\, h(r,\varphi)}{K}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{k(r,\varphi)\, h(r,\varphi)}{\mu(P)}\, r\, \frac{\partial P}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{k(r,\varphi)\, h(r,\varphi)}{\mu(P)}\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right],$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\left[\frac{-k(r,\varphi)}{m\varrho\mu(P)}\left(\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\xi}{\partial\varphi}\frac{\partial P}{\partial\varphi}\right)\right]_{\xi=\xi(\varphi,t)},$$

$$\xi(\varphi,t)\le r\le R(\varphi,t),\qquad 0\le\varphi\le 2\pi,\qquad 0\le t\le T,$$

начальным условиям

$$P(r,\varphi,0)=P_0(r,\varphi),\qquad \xi(\varphi,0)=\xi_0(\varphi),$$
$$\xi_0(\varphi)\le r\le R(\varphi,0),\qquad 0\le\varphi\le 2\pi,$$

и краевым условиям

$$P(r,\varphi,t)|_{r=R(\varphi,t)}=P_1(\varphi,t),\qquad P(r,\varphi,t)|_{r=\xi(\varphi,t)}=P_2(\varphi,t),$$
$$0\le\varphi\le 2\pi,\qquad 0\le t\le T.$$

Здесь m – пористость пласта, $k(r,\varphi)$ – проницаемость пласта, $h(r,\varphi)$ – мощность пласта, $\mu(P)$ – вязкость воды в пласте, σ – средняя газонасыщенность в газовом объеме, K – коэффициент, учитывающий упругость воды в пласте и пористой среды.

Для численного решения сформулированной задачи используется модификация разностно–итерационного алгоритма метода с выпрямлением фронтов. Обсуждаются результаты расчетов.

Оценки параметров экспоненциальной дихотомии и функции Грина для гиперболической полугруппы операторов

Баскаков А.Г.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Получены необходимые и достаточные условия гиперболичности полугруппы операторов, основанные на использовании уравнения Ляпунова.

Установлены оценки параметров экспоненциальной дихотомии и функции Грина, построенной по гиперболической полугруппе операторов. При получении оценок, в частности, используются методы гармонического анализа.

Об одной проблеме конструктивной теории плоских гармонических отображений

Безродных С.И., Власов В.И.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН (Москва, Россия)

Проблема неустранимой погрешности, возникающей при конечно–разностной реализации подхода Уинслоу в конструктивной теории гармонических отображений, рассмотрена на примере известной задачи Роуча — Стейнберга. На этом примере продемонстрирован новый подход, позволяющий эффективно строить гармоническое отображение сложных областей с высокой точностью. Эту возможность предоставляет аналитико–численный метод мультиполей, обладающий экспоненциальной скоростью сходимости и обеспечивающий эффективное построение гармонического отображения с точностью, контролируемой апостериорной оценкой в равномерной по области норме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837), Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики",

проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики" и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

Структуры в задаче Чэфи-Инфанте

Белан Е.П

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Для исследования структур задачи Чэфи-Инфанте рассматривалась система её упрощенных моделей. Их анализ приводит к необходимости пересмотра известных результатов о стационарных структурах задачи Чэфи-Инфанте. В этой связи отметим, проведенный анализ приводит к заключению, что в задаче Чэфи-Инфанте имеет место рождение контрастных структур в результате седло-узловых бифуркаций. Число же устойчивых стуктур неограниченно растет при уменьшении коэффициента диффузии.

Условие существования периодических решений. Линеаризация правой части ОДУ[1]

Белоусов Ф.А.

Центральный экономико-математический институт РАН (Москва, Россия)

Рассматривается класс обыкновенных дифференциальных уравнений самого общего вида

$$\dot{x}(t) = g(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где $g(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по времени. Легко видеть, что любое уравнение этого класса с помощью замены $f(t, x(t)) = g(t, x(t)) - Ax(t)$ может быть представлено в виде

$$\dot{x}(t) = Ax + f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где A - самосопряженная невырожденная (n, n)-матрица, а $f(\cdot,\cdot) \in \mathbb{C}^{(0)}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ - ω-периодическая по времени.

Будут изучаться условия, накладываемые на матрицу A и функцию $f(\cdot,\cdot)$, которые обеспечивают существование единственного ω-периодического решения. Кроме этого, в одномерном случае будут выведены условия для функции $g(\cdot,\cdot)$, которые гарантируют существование таких a (матрица A в одномерном случае преобразуется в константу a) и $f(\cdot,\cdot)$ или другими словами, гарантируют существование единственного ω-периодического решения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Медведев Н. В.* Об одном принципе существования периодического решения дифференциального уравнения в банаховом пространстве. // Математические заметки. 1968. Т. 4, № 1. С. 105–111.

2. *Ахмеров Р. Р.* Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений *http://www-sbras.nsc.ru/rus/textbooks/akhmerov/ode_unicode/*

3. *Beklaryan L. A., Belousov F. A.* The existence of periodical solutions for functional differential equations of pointwise type. // Functional Differential Equations, 2007.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00324).

О регуляризации периодической задачи с импульсным воздействием

Чуйко С.М., Белущенко А.В.

Славянский государственный педагогический университет (Славянск, Украина)

Предположим T-периодическую задачу для системы $z' = A(t)z + f(t)$ некорректно поставленной для произвольной непрерывной функции $f(t)$. Нами исследованы условия регуляризации краевой задачи [1]

$$z' = A(t)z + f(t),\ \ell z(\cdot) := z(0) - z(T) = 0,\ \Delta z(\tau) = Sz(\tau - 0) \qquad (1)$$

в классе функций $z(t) \in C^1\{[0,T] \setminus \{\tau\}_I\}$; здесь $A(t)$ — непрерывная матрица.

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк, 1987. — 287 с.

2. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004.

Спектральный анализ дифференциального оператора с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах

Бичегкуев М.С.

Северо-Осетинский государственный университет (Владикавказ, Россия)

В функциональных пространствах векторных функций, определяемых с помощью весовой функции предэкспоненциального роста рассматриваются спектральные свойства операторов, построенных по некоторому семейству эволюционных операторов.

Пусть $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ – весовая функция (вес), которая считается непрерывной. Символом $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X)$ обозначим банахово пространство векторных функций $x : \mathbb{R} \to X$ таких, что $\frac{x}{\alpha} \in \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, X)$ с нормой $\|x\|_\alpha = \|\frac{x}{\alpha}\|_{\mathcal{F}}$.

По заданному семейству эволюционных операторов $\mathcal{U}\colon \triangle_{\mathbb{R}} \to LB(X)$ строится линейный оператор

$$\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}) \subset \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}_\alpha(\mathbb{R}, X) = \mathcal{F}_\alpha.$$

Предполагается, что весовая функция (вес) удовлетворяет трем условиям:

$$\sup_{|t-s|\leqslant 1} \frac{\alpha(s)}{\alpha(t)} < \infty; \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{\alpha(s-t)}{\alpha(t)} = 0; \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \sup_{s\in\mathbb{R}} \frac{\alpha(t)}{\alpha(s-t)} = 0.$$

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha} : D(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha}) \subset \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}_\alpha$ является генератором сильно непрерывной полугруппы разностных операторов*

$$(T_{\mathcal{U},\alpha}(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t),\ s \in \mathbb{R},\ t \geqslant 0,\ x \in \mathcal{F}_\alpha,$$

где банахово пространство $\mathcal{F}_\alpha \in \{L^p_\alpha,\ p \in [1, \infty);\ (C_0)_\alpha\}$.

Теорема 2. *Спектры $\sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha})$ и $\sigma(T_{\mathcal{U},\alpha}(t))$ связаны равенством*

$$\sigma(T_{\mathcal{U},\alpha}(t)) \setminus \{0\} = \{\exp \lambda t : \lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\mathcal{U},\alpha})\}.$$

Литература

1. А.Г. Баскаков, “Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов”, Функц.анализ и его прилож. 30:3 (1996), С.1–11.

Банаховы многообразия с ограниченной структурой и варианты формулы Гаусса-Остроградского

Богданский Ю.В.
Национальный технический университет Украины "КПИ ННК "ИПСА"(Киев, Украина)

Предложена категория банаховых многообразий определенного класса. Борелевская мера, заданная на многообразии этого класса, индуцирует на границе S области G в M поверхностные меры двух типов (они порождены, соответственно, трансверсальным к S векторным полем и дифференциальной 1-формой, согласованной с S). В терминах каждой из полученных поверхностных мер предложен вариант формулы Гаусса-Остроградского.

Усреднение как мощный исследовательский инструмент: от классических уравнений в частных производных до оценки стоимости жилой недвижимости

Богомолов Я.Л.
Институт прикладной физики РАН (Н.Новгород, Россия)

90-е годы 20-го столетия характеризовались в России бурным развитием математических алгоритмов оценки жилой недвижимости. Основные идеи черпались из методов математической статистики и теории оптимизации, точность которых в рамках многофакторного анализа оставляла желать лучшего. На практике весьма часто наилучшие результаты давали алгоритмы, основанные на аналоговом сравнении, к основному недостатку которых следует отнести типичную нехватку "аналоговых единиц"даже в очень больших базах данных (порядка нескольких тысяч объектов недвижимости). Устранение данного недостатка можно осуществить за счет процедуры усреднения данных по каждому отдельному фактору, характеризующему объекты недвижимости из базы данных. Тогда, в предположении отсутствия корреляции между отдельными факторами, относительная стоимость одного квадратного метра конкретного объекта недвижимости будет представлять собой произведение усредненных по каждому из факторов коэффициентов. На практике такая модель дает относительную точность оценки объекта недвижимости порядка 5-10 процентов. Следует отметить, что сама по себе идея усреднения, помимо использования ее при построении приближенных математических моделей вообще, широко используется в приближенных вычислениях в частности; например, при решении классических уравнений математической физики с помощью игр для детей дошкольного возраста в сочетании с теоремой о среднем для уравнения Лапласа (игровая реализация метода Монте-Карло).

Необходимые условия для K–экстремумов вариационных функционалов в пространствах Соболева над многомерной областью

Божонок Е.В., Кузьменко Е.М.
Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского
(Симферополь, Украина)

В работе исследовано обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского для компактных экстремумов вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y) dx$$

в пространствах Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей.

Далее рассмотрена обратная задача повышения гладкости решений обобщенного уравнения Эйлера–Остроградского. Показано, что при некоторых естественных условиях достигается определенное улучшение гладкости K–экстремалей.

Наконец, получено обобщенное необходимое условие Лежандра для компактных экстремумов вариационных функционалов в $W^{1,p}$. Сначала введено понятие скалярно неотрицательной квадратичной формы. Далее доказано, что гессиан интегранта по главным переменным скалярно неотрицательный почти всюду в точке K–минимума. Рассмотрен пример.

О линейных отношениях, порожденных интегральным уравнением с операторной мерой

Брук В.М.

Саратовский государственный технический университет (Саратов, Россия)

В конечномерном гильбертовом пространстве на конечном или бесконечном интервале рассматривается интегральное уравнение с мерой, являющейся суммой операторной (вообще говоря, несамосопряженной) и неванлинновской мер. Определяются семейства максимальных и минимальных отношений, порожденных как этим уравнением, так и сопряженным к нему; устанавливается связь между этими семействами. Доказывается, что если сужение максимального отношения непрерывно обратимо, то оператор, обратный к такому сужению, является интегральным. Устанавливается достаточное условие, при котором сходимость несамосопряженных операторных мер влечет сходимость соответствующих интегральных операторов, обратных к сужениям максимальных отношений. Полученные результаты применяются к дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых – обобщенные функции.

Обратные спектральные задачи для пучков дифференциальных операторов[1]

Бутерин С.А.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Рассматриваются дифференциальные пучки вида

$$y'' + (\rho^2 - 2\rho q_1(x) - q_0(x))y = 0, \quad 0 < x < T < \infty, \tag{1}$$

где $q_j(x) \in W_j^1[0, T]$ – комплекснозначные функции, а ρ – спектральный параметр. Вводится обобщение классических дискретных спектральных данных, соответствующих заданию спектральной функции для самосопряженного оператора Штурма-Лиувилля. Показывается их связь с другими типами спектральных характеристик, а именно: с функцией Вейля и со спектрами двух краевых

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ и ННС (проекты 10-01-00099_а, 10-01-92001-ННС_а)

задач для уравнения (1) с одним общим краевым условием. Доказываются теоремы единственности решения соответствующих обратных задач. С помощью развития идеи метода спектральных отображений указывается конструктивная процедура решения обратной задачи вместе с необходимыми и достаточными условиями ее разрешимости, и доказывается устойчивость решения.

Методы теории возмущений для получения аналитических формул оценки баскет-спред опционов

Вальков А.Ю, Косенко А.С., Лёвен Т.

СПб Государственный Торгово-Экономический Университет (Россия)
Высшая Школа Экономики, СПб Филиал (Россия)
Eneriss GmbH (Germany)

Рассматривается семейство аналитических приближений для теоретической цены опциона на портфель базовых активов (возможны отрицательные веса). Результат представлен в стиле формулы Блэка-Шоулза как взвешенная сумма вероятностных интегралов. Формулы сочетают высокую точность и простоту аналитических выражений.

Теоретическая цена опциона согласно методу риск нейтрального оценивания представима в виде дисконтированного риск нейтрального математического ожидания от функции платежа. Формула оценивания сводится к линейной комбинации гауссовских интегралов по некоторым многомерным областям с гладкой границей. Далее каждый интеграл аппроксимируется аналитически на основе теории возмущений по относительной кривизне границы области интегрирования. Первое приближение получается линейной аппроксимацией этой границы, тогда интеграл вычисляется точно. Приближения более высоких порядков можно получить аппроксимируя границу полиномиально, членами ее разложения в ряд Тейлора. Разложения строятся в точке максимального значения подынтегральной функции, что улучшает точность и упрощает формулы.

Наши численные эксперименты на большом массиве данных показали, что для расчета спреда более предпочтительным является метод первого порядка, а для вычисления Greeks эффективнее оказывается метод второго порядка. Проводится сравнение с ранее предложенными аналитическими методами оценки баскет-спред опционов [1,2].

Литература

1. R. Carmona and V. Durrleman. *Generalizing the Black-Scholes formula to multivariate contingent claims.* Journal of Computational Finance, **9**, pp. 42-63, (2005).

2. S. J. Deng, , M. Li, and J. Zhou. *Closed-form approximations for spread option prices and Greeks.* Journal of Derivatives, pp. 58-80, (March 2008)

Задача оценки достаточности капитала компании страхования жизни с помощью реплицирующего портфеля

Вальков А.Ю, Косенко А.С., Лёвен Т.

СПб Государственный Торгово-Экономический Университет (Россия)
Высшая Школа Экономики, СПб Филиал (Россия)
Eneriss GmbH (Germany)

Одним из допустимых методов оценки достаточности капитала (solvency capital requirement) в рамках . в рамках европейской системы регулирования страховых компаний Solvency II является метод реплицирующего портфеля. Метод основан на репликации денежных потоков по портфелю страховых полисов компании портфелем финансовых инструментов. Задача построения реплицирующего портфеля сводится к задаче линейной регрессии, в которой наблюдения генерируются с помощью метода Монте-Карло. Основные трудности, возникающие при решении данной задачи стандартными методами — это во-первых, существенная мультиколинеарность модели, приводящая к высокой чувствительности результирующего ответа к небольшим изменениям исходных данных, а во-вторых большое число неизвестных и отсутствие автоматических процедур редуцирования малосущественных переменных из задачи

В данной работе предлагается семейство методов, позволяющих в значительной мере снять эти трудности. Используется сочетание двух процедур:

1. Для преодоления сильной мультиколлинеарности — метод оптимального прореживания переменных (обобщение “Optimal brain surgery” — терминология нейронных сетей). Это позволяет упростить структуру модели путем понижения размерности задачи и этим существенно снизить обусловленность системы нормальных уравнений.

2. Для улучшения устойчивости итогового репликационного портфолио — регуляризация задачи (обобщение "Elastic net regularization” — также терминология нейронных сетей). Это позволяет одновременно повысить стабильность решения по отношению к небольшим изменениям исходных данных и в ряде случаев (также как и прореживание) — исключать несущественные переменные.

Численные эксперименты показывают практическую эффективность предложенного алгоритма.

Об одном классе уравнений Ньютона-Нельсона на векторных расслоениях со связностями

Винокурова Н.В.

НИЦ ФГУП "18 ЦНИИ"МО РФ (Курск, Россия)

Построено и изучено дифференциальное уравнение второго порядка на пространстве векторного расслоения со связностью, которое в некоторых специальных случаях интерпретируется как уравнение движения классической частицы в классическом калибровочном поле. Форма этого уравнения позволяет рассматривать его как специальный вид второго закона Ньютона, что делает возможным его квантование на языке стохастической механики Нельсона. Осуществляется указанная процедура квантования в простейшем случае – когда базой расслоения является риманово многообразие, а стандартный слой является вещественным линейным пространством. В частности, строится соответствующее уравнение Ньютона-Нельсона (уравнение движения в стохастической механике) и доказывается одна теорема существования его решения.

Уравнение Ньютона-Нельсона, соответствующее закону Ньютона, в пространстве расслоения над римановым многообразием принимает вид

$$\frac{1}{2}(\mathbf{D}^Q_+ D_- + \mathbf{D}^Q_- D_+)\eta(t) = \overline{e(\eta(t)) * \tilde{\Phi}(\cdot, v^\eta(t,\eta(t)))}. \tag{1}$$

Теорема 1. *Пусть для тензорного поля $\alpha_{(t,(m,q))}(\cdot)$ существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\int_0^T (\|\alpha_{(t,x(t))}(\cdot)\|^2 + \|tr\nabla^H\alpha_{(t,x(t))}(\alpha\cdot,\cdot)\|^2)dt < C$$

для некоторого $T > 0$ и любой непрерывной кривой $x(t)$ в $Q, t \in [0, T]$, где $\|\alpha_{(t,x)}(\cdot)\|$ – операторная норма (все нормы порождены g^Q). Пусть обе связности H^τ и H^π стохастически полны. Тогда для любой точки $(m, q) \in Q$, любого вектора $\beta_0 \in H^\pi_(m, q)$ и любого момента времени $t_0 > 0$ существует случайный процесс $\eta(t)$ в Q такой, что:
– он корректно определен на $[0, T]$;
– $\eta(0) = (m, q)$ и $D\eta(0) = \beta_0$;
– для всех $t \in (t_0; T)$ процессы $\eta(t)$ и $\xi(t) = \pi\eta(t)$ удовлетворяют уравнению (1);
– вдоль $\eta(t)$ заряд $e(\eta(t))$ имеет постоянное значение.

Приближение семествами сплайнов и вопросы численного интегрирования

Винц А.Б.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

Изучается приближение функций семействами кусочно-полиномиальных функций (сплайнов) в полной шкале пространств с интегральной метрикой. Полученные результаты применяются к построению кубатур со случайно сдвинутыми узлами для интегрирования сильно осциллирующих и разрывных функций.

Аналитический метод Треффца решения задачи Дирихле в сложных областях

Власов В.И., Скороходов С.Л.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН (Москва, Россия)

Рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона в полигональных областях G, содержащих углы, разрезы и бесконечные полки или раструбы. Решение строится в явном виде с помощью метода Треффца, включающего нахождение конформного отображения $\mathcal{F}(w)$ исходной области G на некоторую многоугольную неоднолистную область, содержащую точки ветвления и последующего нахождения второй первообразной от $\mathcal{F}(w)$. Метод позволяет в явном виде находить разложение решения на подмножествах, в совокупности покрывающих замыкание области G, и выражать коэффициенты разложений в конечном виде через специальные функции или константы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837), Программы ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимальные алгоритмы решения задач математической физики" и Программы №3 фундаментальных исследований ОМН РАН.

О спектральных свойствах линеаризованной задачи Маскета-Веригина

Войтицкий В.И.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Исследуются свойства спектральной задачи, порожденной линеаризованной проблемой Маскета-Вери́гина с учетом эффекта поверхностного натяжения и гравитации. Установлено, что в общем случае задача имеет дискретный спектр, состоящий из ветви положительных собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности, а также не более чем из конечного числа отрицательных и нулевых собственных значений. Найдена асимптотическая формула роста собственных значений. Система соответствующих собственных функций образует ортонормированный базис в некотором гильбертовом пространстве.

О спектре одной частично-диссипативной гидросистемы

Вронский Б.М.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

В докладе рассмотрена задача о малых движениях и нормальных колебаниях частично-диссипативной гидросистемы, состоящей из однородных не смешивающихся идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей. Система занимает при этом ограниченный сосуд.

Исходная спектральная задача приводится к задаче для некоторой системы операторных уравнений, рациональным образом зависящих от спектрального параметра. Доказано, что спектр нормальных колебаний состоит из счетного множества конечно-кратных собственных значений, расположенных в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси. При этом он распадается на четыре последовательности с предельными точками в нуле и на бесконечности и локализованных вдоль положительной полуоси и мнимой оси. Доказаны свойства раздельной базисности собственных элементов задачи и кратной полноте.

Некоторые свойства решений начально-краевой и спектральной задач о конвективных движениях жидкости в сосуде

Гажева И.А.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматриваются малые движения и нормальные колебания неравномерно нагретой вязкой жидкости, целиком заполняющей некоторый неподвижный объем и находящейся под действием внешнего гравитационного поля. Получены теоремы о существовании и единственности ослабленного и сильного решений эволюционной задачи.

Линеаризованная начально-краевая задача о малых конвективных движениях жидкости приводит к рассмотрению двух случаев – подогрева снизу и подогрева сверху. Для спектральных задач в обоих случаях получен ряд утверждений о свойствах спектра, а также о свойствах соответствующих собственных и присоединенных элементов.

Об определении равновесных границ раздела устойчивости гидросистемы “жидкость–баротропный газ” и их устойчивости

Газиев Э.Л.

Крымский инженерно–педагогический университет (Симферополь, Украина)

Рассматривается проблема определения равновесной поверхности жидкости в системе "жидкость–баротропный газ", находящейся в прямоугольном канале под действием гравитационного поля с интенсивностью $\vec{g}$.

Проблема сводится [1], [2] к отысканию на отрезке $[0, s_1]$, $x(s_1) = 1$, решения $\{x(s), z(s)\}$ задачи Коши

$$x'' = -kz', \quad x'(0) = 1, \ \ x(0) = 0, \tag{1}$$

$$k := Bz + bf_\varepsilon(z) + c, \quad f_\varepsilon(z) := [\exp(-\varepsilon z) - 1 + \varepsilon z]/\varepsilon, \tag{2}$$

$$z'' = kx', \quad z'(0) = 0, \ \ z(0) = z_0, \tag{3}$$

$$B := B_d - b, \ B_d := \rho g l^2/\sigma, \ b := \rho_{2,0}(0) g l^2/\sigma, \ \varepsilon := gl/a^2, \tag{4}$$

удовлетворяющего условию $x'^2(s) + z'^2(s) = 1$. Здесь: B, B_d, b, C — безразмерные параметры, l — полуширина канала, a — скорость звука в газе, s — параметр вдоль кривой $\gamma := \Gamma \cap \{y = const\}$, Γ — равновесная поверхность, ρ — плотность жидкости, $\rho_{2,0}(0)$ — плотность газа (на γ).

Построен итерационный алгоритм нахождения равновесной формы $\gamma = \gamma(B, b, C, \varepsilon)$ как решения задачи (1)–(4), основанный на применении метода Рунге–Кутта 4-го порядка к равносильной задаче для системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. Контроль точности и высокая скорость алгоритма обеспечиваются за счет совместного с задачей (1)–(4) решения интегрального уравнения $\int\limits_0^{s_1} z(s)x'(s)ds = 0$, описывающего выполнение условия сохранения объема несжимаемой жидкости. Устойчивость найденной равновесной формы γ определяется, исходя из принципа минимума потенциальной энергии гидросистемы, приводящего к спектральному признаку устойчивости и исследованию знака функции $D_0(s) = u_0(s)\int\limits_0^s v_0(\tau)d\tau - v_0(s)\int\limits_0^s u_0(\tau)d\tau$, зависящей от ненулевых ограниченных решений задач Коши

$$Lu_0 = 0, \quad u_0(0) = 1; \qquad Lv_0 + 1 = 0, \quad v_0(0) = 0; \tag{5}$$

$$Lu := -u'' + [(B + b(1 - \exp(\varepsilon z))x' - k^2]u. \tag{6}$$

Для уменьшения количества операций и повышения эффективности алгоритма эти вычисления выполняются параллельно с основным вычислительным процессом. Эффективность алгоритма значительно повышается с учетом того, что поиск первого положительного нуля s_* функции $D_0(s)$ можно заменить контролем условий $x'(s) = 0 \iff z'(s) = \pm 1$, при этом $[0, s_*]$ — максимальный участок устойчивости. Если $s_* > 1$, то равновесная форма устойчива, а при $s_* < 1$ — неустойчива.

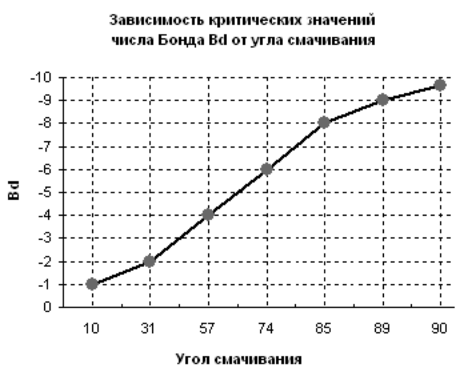


Рис. 1. Визуализация численных результатов при $b = 0.001$, $\varepsilon = 0,0000981$.

Реализация построенного алгоритма позволила для заданного угла δ смачивания получить зависимость параметра $C(\delta)$ от параметров B_d и b в виде таблиц и графиков, а также вывод об устойчивости соответствующей равновесной формы $\gamma(B_d, b, C, \varepsilon)$. Графики зависимости угла смачивания δ от значений параметра c и границы области устойчивости для жидкости, “подвешенной” над газом (т.е. зависимости критических для устойчивости равновесной формы значений $-B_d$ от угла смачивания δ) при $b = 0.001$, $\varepsilon = 0,0000981$ приведены на рис. 1.

1. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости. — К.: Наукова думка, 1992. — 592 с.

2. Газиев Э.Л. Задача статики гидросистемы ”жидкость–баротропный газ” в условиях, близких к невесомости. — // Труды ИПММ НАНУ. — Т. 20. — 2010. — С. 39-47.

Многообразия, расслоения, связности

Гликлих Ю.Е.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Курс из 4-5 лекций знакомящий с современной геометрией многообразий. Начинаем с понятия гладкого многообразия, описываем понятия расслоения (в частности, векторного и главного). Завершается курс описанием связностей на расслоениях и на многообразиях, ковариантной производной и т.д.

О разрешимости абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

Глушак А.В., Покручин О.А.

Белгородский госуниверситет (Белгород, Россия)

В банаховом пространстве при $k > 0$ рассматривается задача Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу

$$u''(t) + \frac{k}{t}u'(t) = Au(t), \qquad t > 0,$$

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = 0.$$

Описывается класс операторов A, обеспечивающий однозначную разрешимость рассматриваемой начальной задачи.

О резонансах оператора Лапласа в волноводе с нелокальными возмущениями краевых условий

Головина А.М.

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы (Уфа, Россия)

Рассматривается оператор Лапласа в двумерной полосе определённой ширины. На верхней границе полосы задано граничное условие Дирихле, а нижняя часть границы содержит два сегмента различной длины, находящиеся на фиксированном расстоянии друг от друга. На описанных сегментах нижней части границы задано граничное условие Дирихле, а на оставшейся части нижней границы – Неймана. Исследуется поведение поведение резонансов оператора

Лапласа в данной полосе при стремлении длин сегментов нижней части границы полосы к бесконечности. Построены первые члены асимптотических разложений.

Максимин в многошаговой модели разоружения

Горбатов А.С.

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Составлена модель описывающая конкуренцию в области вооружений двух государств. Описан метод динамического программирования. Поэтапное применение этого метода для двухшагового варианта модели задачи разоружения, получены явный вид решения (максимин и максиминная стратегия). Игровой смысл этого решения.

Аттракторы динамических систем с монотонной мерой на потоке

Грушковская В.В., Зуев А.Л.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины (Донецк, Украина)

Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, А.Ранцером был предложен подход к исследованию асимптотического поведения решений в терминах функции плотности меры. В данном докладе этот подход распространен на случай абстрактных динамических систем в метрическом пространстве, в результате чего получены достаточные условия притяжения траекторий. Для исследования притягивающего множества используется мера в фазовом пространстве, обладающая свойством монотонности на потоке. Кроме того, получено описание предельного множества решений нелинейной системы дифференциальных уравнений для почти всех начальных условий. Этот результат обобщает известные теоремы о притяжении решений к особой точке, а также позволяет рассматривать более широкий класс функций плотности. В качестве примера исследована модельная система дифференциальных уравнений.

Случайные частично упорядоченные множества: модели и результаты

Гуров С.И.

Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

В рамках вероятностного подхода к решению задач алгебры и комбинаторики рассматриваются различные модели частично упорядоченных (ч.у.) множеств. Вводятся необходимые понятия, определения структурных элементов, числовых характеристик ч.у. множеств и приводятся оценки их значений. Указываются нерешённые задачи теории ч.у. множеств. Представляется новый результат, связанный с "1/3-2/3 гипотезой".

Линейная параболическая задача. Высокочастотная асимптотика в критическом случае

Гусаченко В.В., Ильичева Е.А., Левенштам В.Б.
Южный федеральный университет (Ростов-на-Дону, Россия)

Для параболической задачи второго порядка с высокочастотными слагаемыми построена полная формальная асимптотика периодического по времени решения. Предельная стационарная задача предполагается вырожденной кратности один. Рассмотрены два случая: собственная функция предельной задачи, отвечающая нулевому собственному значению, 1) не имеет обобщенных присоединенных (в смысле Вишика-Люстерника) функций; 2) имеет единственную обобщенную присоединенную функцию.

О дробно-линейных преобразованиях, порожденных обобщенными J-внутренними матриц функциями

Деркач В.А.
Донецкий национальный университет (Донецк, Украина)

Изучается один класс $\mathcal{U}_\varkappa(J)$ обобщенных J-внутренних матриц функций $W(\lambda)$ и соответствующий класс дробно-линейных преобразований T_W. Образ класса Шура S при дробно-линейном преобразовании T_W $(W \in \mathcal{U}_\varkappa(J))$ охарактеризован в терминах некоторых пространств Понтрягина с воспроизводящими ядрами. Для одного подкласса обобщенных J-внутренних матриц функций $W(\lambda)$ получены факторизационные формулы, которые затем применяются для параметризации всех матриц функций из $T_W[S]$, лежащих в обобщенном классе Шура $S_\varkappa$.

Приближенное решение нелинейных уравнений с дробными интегралами на отрезке

Джабраилов А.Л.
Чеченский государственный университет (Грозный, Россия)

Рассматривается метод монотонных операторов для различных классов интегральных уравнений с дробными интегралами и монотонной нелинейностью, доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и способах нахождения решений в вещественных пространствах Лебега. Показано, что решения могут быть найдены в пространстве методом последовательных приближений пикаровского типа и доказаны оценки скорости их сходимости. Полученные результаты охватывают в частности, линейные интегральные уравнения типа свертки.

Состояния обратимости дифференциальных операторов с неограниченными периодическими операторными коэффициентами

Диденко В.Б.
Воронежский Государственный Университет (Воронеж, Россия)

Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы дифференциальный оператор с неограниченными периодическими коэффициентами обладал такими свойствами как непрерывная обратимость, фредгольмовость, замкнутость образа, дополняемость образа, дополняемость ядра, корректность, сюръективность, инъективность, как в пространстве периодических, так и непериодических функций.

О неравенстве Бернштейна для векторов из банаховых пространств

Дикарев Е.Е.

Воронежский Государственный Университет (Воронеж, Россия)

Для векторов из банахова пространства изометрического представления однопараметрической группы операторов получено неравенство Бернштейна. Вводится понятие целой функции на бесконечности, и для них получено неравенство Бернштейна. Получены приложения к оценке коммутатора.

Необходимые условия слабого минимума в задачах оптимального управления с интегральными уравнениями

Дмитрук А.В.

МГУ (Москва, Россия)

Рассматривается задача оптимального управления, в которой управляемая система задана системой интегральных уравнений типа Вольтера. Имеется конечное число ограничений равенства и неравенства на концы траектории, и целевой функционал также зависит от концов (т.е. задан в форме Майера). Допускаются также ограничения равенства и неравенства на фазовые и управляющие переменные, которые предполагаются регулярными (в том смысле, что градиенты по управлению всех ограничений равенства и активных ограничений неравенства линейно-позитивно независимы). Получены необходимые условия первого порядка для слабого минимума, т.е. условия стационарности — обобщение уравнения Эйлера—Лагранжа.

Гамма – сходимость отображений, которые действуют в полуупорядоченные пространства

Довженко А.В.

Днепропетровский национальный университет им. О. Гончара
(Днепропетровск, Украина)

В докладе будет представлена концепция $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-сходимости отображений, которые действуют в полуупорядоченные пространства. Будет показано, что данная концепция является природным расширением понятия Г-сходимости функционалов на векторнозначные отображения.

В докладе будут продемонстрированы результаты, раскрывающие тесную связь между введенным понятием $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-сходимости отображений и сходимостью по Куратовскому последовательностей соответствующих надграфиков и конадграфиков.

При помощи примеров будет проиллюстрировано, что прямой перенос теории Г-сходимости функционалов на случай векторнозначных отображений невозможен.

В завершении доклада будут раскрыты секвенциальные свойства $\Gamma^{\Lambda,\mu}$-сходимости отображений и доказана теорема о ее компактности.

Многомасштабные пограничные слои

Долбеева С.Ф., Ильин А.М.

Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия)

Рассмотрен пример начальной задачи для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной. Выясняется, что для построения правильной равномерной асимптотики решения необходимо ввести несколько масштабов независимой переменной.

Краевые задачи возникающие в моделях формования волокна[1]

Дрегля А.И.

Иркутский госуниверситет (Иркутск, Россия)

В теории материалов при моделировании процесса формования волокна [1], задача решения уравнения импульсов для погранслоя и теплопередачи в силу малости теплового и импульсного погранслоев в малой окрестности фильеры сводится к решению следующей краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+xy)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right] + F\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + x\left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\right] = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+xy)\frac{\partial G}{\partial y}\right] + PF\frac{\partial G}{\partial y} + Px\left[\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}\right] = 0, \tag{2}$$

$$F\big|_{y=0}= 0, \big(F + x\frac{\partial F}{\partial x}\big)\big|_{y=0} = 0, G\big|_{y=0}= 1, \frac{\partial F}{\partial y}\big|_{y=0} = 2, F\big|_{y=\infty}= const,\ G\big|_{y=\infty} = 0, \tag{3}$$

Теорема. *Существует $R > 0$ такое, что в области $D = \{0 \le x \le r, 0 \le y < \infty\}$, где $0 < r \le R$, краевая задача (1) – (3) имеет решение*

$$F = \begin{cases} \widehat{F}(x,y), & 0 \le y \le r, 0 \le x \le r, \\ const, & r < y < \infty, \end{cases} \qquad G = \begin{cases} \widehat{G}(x,y) & 0 \le y \le r, 0 \le x \le r, \\ 0, & r \le y < \infty, \end{cases} \tag{4}$$

функции $\widehat{F}(x,y)$, $\widehat{G}(x,y)$ — удовлетворяют системе (1) и (2) с начальными условиями $\widehat{F}(x,0) = 0$, $\widehat{F}'_y(x,0) = 2$, $\widehat{F}_y^{(2)}(x,0) = a(x)$, $\widehat{G}(x,0) = 1$, $\widehat{G}_y(x,0) = b(x)$, где $a(x)$, $b(x)$ – фиксированные функции аналитические при $0 \le x \le r$.

При произвольных аналитических функциях $a(x)$ и $b(x)$ решение (4) будет разрывным. Методом пристрелки можно подобрать такие $a(x), b(x)$ и подвижную границу $r > 0$, при которых соответствующее решение (4) будет непрерывным. В работах [2 - 4] нами даны условия существования решения и других краевых задач при наличии погранслоя в моделировании процессов формования синтетических волокон.

Список литературы

[1] L. J. Crane, Boundary Layer Flow on a Circular Cylinder Moving in Fluid at Rest, Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP), 1972, 23, p. 201–212.

[2] Н. А. Сидоров, Р. Ю. Леонтьев, А. И. Дрегля, О малых решениях нелинейных уравнений с векторным параметром в секториальных окрестностях, Матем. заметки, 2012, 91, 1, с. 120–135.

[1] Работа поддержана ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” Минобрнауки No. 2012-1.2.2-12-000-1001-012 и грантом Минобрнауки, номер госрегистрации НИР: 01200804682.

[3] А. И. Дрегля, О существовании решения в одной модельной задачи теории погранслоя, Изв. ИГУ, сер. математика, 2007, т.1, No. 1, с. 113–118.

[4] А. И. Дрегля, Некоторые аналитические и точные решения систем уравнений в теории моделирования полимеров, Сиб.ЖИМ, 2008, т.11, No. 3(35), с. 61–70.

Спектральный анализ разностных операторов

Дуплищева А.Ю.

Воронежский Государственный Университет (Воронеж, Россия)

Пусть X - комплексное банахово пространство, $EndX$ - банахова алгебра линейный ограниченных операторов, действующих в X. Символом $l^p = l^p(\mathbb{Z}, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство двусторонних последовательностей векторов из X, суммируемых со степенью p для $p \in [1, \infty]$ и ограниченных при $p = \infty$, с нормой

$$||x||_p = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} ||x(k)||^p)^{1/p}, \quad x \in l_p, \quad p \in [1, \infty], \quad ||x||_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} ||x(k)||, \quad x \in l_\infty.$$

Пусть $c_0 = c_0(\mathbb{Z}, X)$ - замкнутое подпространство последовательностей x из $l^\infty(\mathbb{Z}, X)$ со свойством $\lim\limits_{n \to \infty} ||x(n)|| = 0$, и $l^1 = l^1(\mathbb{Z})$ - банахова алгебра комплексных суммируемых последовательностей с нормой $||f||_1 = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}} |f(n)|$. Пусть $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ - линейный замкнутый оператор с областью определения $D(\mathcal{A})$ из пространства X. Он называется обратимым (непрерывно обратимым), если его ядро $Ker\mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) : \mathcal{A}x = 0\}$ нулевое и образ $Im\mathcal{A} = \{\mathcal{A}x, x \in D(\mathcal{A})\}$ оператора $\mathcal{A}$ совпадает со всем пространством X.

Определение 1. Пусть $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset X \to X$ - замкнутый линейный оператор. Рассмотрим следующие условия:

1). $Ker\mathcal{A} = 0$. (т. е. оператор $\mathcal{A}$ инъективен);

2). $1 \leq n = dim\, Ker\mathcal{A} < \infty$;

3). $Ker\mathcal{A}$ - бесконечномерное подпространство из X ($dim\, Ker\mathcal{A} = \infty$);

4). $Ker\mathcal{A}$ - дополняемое подпространство в X;

5). $\overline{Im\,\mathcal{A}} = Im\,\mathcal{A}$ (образ оператора $\mathcal{A}$ замкнут), что эквивалентно положительности величины (минимального модуля оператора $\mathcal{A}$)

$$\gamma(\mathcal{A}) = \inf_{x \in D(\mathcal{A}) | Ker\mathcal{A}} \frac{||\mathcal{A}x||}{dist(x, Ker\mathcal{A})},$$

где $dist(x, Ker\mathcal{A}) = \inf\limits_{x_0 | Ker\mathcal{A}} ||x - x_0||$ - расстояние от вектора x до подпространства $Ker\mathcal{A}$.

6). Оператор $\mathcal{A}$ корректен(равномерно инъективен), то есть $Ker(\mathcal{A}) = 0$ и $\gamma(\mathcal{A}) > 0$;

7). $Im\,\mathcal{A}$ - замкнутое подпространство из X конечной коразмерности $codim\, Im\,\mathcal{A} = m \geq 1$;

8). $Im\,\mathcal{A}$ - замкнутое подпространство из X бесконечной коразмерности ($codim\, Im\,\mathcal{A} = \infty$);

9). $Im\,\mathcal{A}$ - замкнутое дополняемое в X подпространство;

10). $Im\,\mathcal{A} = X$ ($\mathcal{A}$ - сюръективный оператор);

11). Оператор $\mathcal{A}$ обратим.

Если для оператора $\mathcal{A}$ выполнены все условия из совокупности условий $S = i_1, \ldots, i_k$, где $1 = i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 11$, то будем говорить, что оператор

$\mathcal{A}$ находится в состоянии обратимости S. Множество состояний обратимости оператора $\mathcal{A}$ обозначим символом $St_{inv}(\mathcal{A})$.

Рассмотрим пару разностных операторов вида:

$$\mathcal{D}(x) = x(n+m) - \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_k x(n+m-k),\ x \in l^p,\ p \in [1, \infty],\ \mathcal{A}_k \in EndX,\ 1 \le k \le m,$$

и

$$\tilde{\mathcal{D}}(y) = y(n+1) - \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I \\ \dots & & & & & \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & \dots & A_2 & A_1 \end{pmatrix} y(n),$$
$$y \in l^p(\mathbb{Z}, X^m),\ p \in [1, \infty],\ A_k \in EndX,\ 1 \le k \le m.$$

Теорема 1. Множество состояний операторов $D(\mathcal{D}) = D(\mathcal{A}) \subset l^p \to l^p$ и $D(\tilde{\mathcal{D}}) = D(\tilde{\mathcal{A}}) \subset l^p(\mathbb{Z}, X^m) \to l^p(\mathbb{Z}, X^m)$ совпадает, то есть $St_{inv}(\mathcal{D}) = St_{inv}(\tilde{\mathcal{D}})$.

Деформация ответов алгоритмов анализа данных

Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Доклад посвящен применению нелинейных операций для составления алгоритмических суперпозиций при решении прикладных задач анализа данных. Дается небольшой теоретический обзор, включающий результаты А. Пинкуса по интерполяции и теории нейронных сетей, а также некоторые результаты алгебраического подхода к распознаванию, развиваемого научной школой академика РАН Ю.И. Журавлева. Затем подробно описываются методы, применяемые в реальных задачах (эта часть доклада базируется на успешном авторском опыте участия в крупных международных соревнованиях по прикладному анализу данных).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 12-07-00187-а) и гранта Президента РФ (МД-757.2011.9).

Асимптотика решения второй краевой задачи для уравнения Лапласа вне малой окрестности отрезка

Ершов А.А.

Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия)

Методом согласования найдена асимптотика решения внешней задачи Неймана вне малой окрестности отрезка. Малым параметром является ширина окрестности. Физической интерпретацией решения является двумерный потенциал скоростей идеальной жидкости при ламинарном обтекании поперёк тонкого тела.

О формулах следов для квантовых лапласианов

Ершова Ю.Ю., Киселев А.В.

Институт математики НАНУ (Киев, Украина), СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

В докладе рассматривается вопрос восстановления условий связи в вершинах для квантового лапласиана (оператора Лапласа, заданного на конечном компактном метрическом графе) по его спектру. Обсуждается получение бесконечной серии формул следов для пары операторов указанного класса с разными условиями связи. При этом предполагается, что эти условия имеют либо $\delta-$, либо $\delta'-$тип. Такие формулы оказываются применимы к восстановлению констант связи в вершинах по спектру оператора на графе. В отличие от существующих в науке результатов, мы не накладываем дополнительных условий на топологию графа, в частности, допускается наличие петель, циклов и кратных ребер. Кроме того, исходными спектральными данными для нас является спектр соответствующего оператора, а не отображение Дирихле-Неймана, отвечающее границе графа.

Гарантированные равновесия в конфликтах

Жуковский В.И.

Московский государственный университет технологий и управления им. К.Г. Разумовского (Москва, Россия)

Вводится (по аналогии с максимином) понятие гарантированного равновесия в бескоалиционной игре при неопределенности. Устанавливается существование гарантированного равновесия в смешанных стратегиях при обычных для математической теории игр ограничениях. Именно, для бескоалиционной игры N лиц при неопределенности и в смешанных стратегиях

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y, \{f_i(\mu, y) = \int_X f_i(x,y)\mu(dx)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle.$$

Пара $(\bar{\mu^e}, \bar{f^e}) \in \{\mu\} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ образует гарантированное равновесие (μ - мера - - произведение $\mu_1(dx_1)\cdot ... \cdot \mu_N(dx_N)$, $x = (x_1, ..., x_N) \in \prod_{i=1}^{N} X_i = X$ - ситуация в чистых стратегиях игроков), если

1) $\exists\ y_s(x)$ - минимальная по Слейтеру неопределенность в N-критериальной задаче $\langle Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$ при каждом $x \in X$;

2) $\{\mu^e\}$ - множество равновесных по Нэшу ситуаций в игре $\langle \mathbb{N}, \{\mu_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i[\mu] = \int\limits_X f_i(x, y_s(x))\mu(dx)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$;

3) $\bar{\mu^e}$ - максимальна по Слейтеру в N-критериальной задаче $\langle \{\mu^e\}, \{f_i[\mu]\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$;

4) $\bar{f^e} = (\bar{f_1^e}[\bar{\mu^e}], ..., \bar{f_N^e}[\bar{\mu^e}])$.

Теорема 1. *Пусть в игре Γ (квазисмешанном расширении $\langle \mathbb{N}, \{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}, Y, \{f_i(x,y)\}_{i\in\mathbb{N}}\rangle$)*

1) множества X_i $(i \in \mathbb{N})$ и Y суть компакты из $\mathbb{R}^{n_i}$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно и Y выпукло,

2) функции $f_i(x,y)$ $(i \in \mathbb{N})$ непрерывны на $X \times Y$ и $\exists j \in \mathbb{N}$ такой, что $f_j(x,y)$ строго выпукла по $y \in Y$ для каждого $x \in X$.

Тогда в Γ существует гарантированное равновесие.

К обратной задаче Штурма – Лиувилля на всей оси

Жура Н.А., Солдатов А.П.

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН (Москва, Россия), Белгородский государственный национальный исследовательский университет (Белгород,Россия)

Обсуждается вопрос единственности решения обратной задаче Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = k^2 y, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В отличие от классического подхода $[1-3]$ этот вопрос сводится к разрешимости задачи линейного сопряжения

$$\phi^+(t) - G(t)\phi^-(t) = g(t), \quad G = \begin{pmatrix} re^{-2} & 1-|r|^2 \\ 1 & -\bar{r}e^2 \end{pmatrix},$$

на всей прямой для вектор функции $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, где $e(t) = e^{ixt}$ с фиксированным параметром $x \in \mathbb{R}$, и комплексная функция $r(t)$ по модулю не превосходит 1. К этой задаче оказывается возможным применить известные результаты о факторизации[4], что в конечном счете и обеспечивает единственность решения обратной задачи Штурма– Лиувилля.

Литература

1. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения.–Киев: Наукова думка, 1977.тических систем на плоскости, Дифференциальные уравнения, 2003, Т. 39, No 5, С. 674-686

2. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. Москва, Наука, 1984.

3. Юрко В.А. Введение в теорию обратных спектральных задач. Москва, Физматлит, 2007.

4. Воронин А.Ф. Частные индексы унитарной и эрмитовой матриц- функций, СМЖ, 2010, 51, 5, С. 805 – 809

Зависимость собственных значений оператора сдвига от величины сдвига

Журавлев Н.Б., Соколова А.Н.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Рассматривается периодическое решение нелинейного автономного дифференциально-разностного уравнения. Мультипликаторами Флоке называются собственные значения оператора, который осуществляет сдвиг вдоль решений линеаризованного уравнения на время T, равное периоду исследуемого решения. Основная трудность в построении метода отыскания мультипликаторов Флоке возникает в случае, когда период исследуемого решения не соизмерим с запаздыванием. Ранее был предложен аппраксимационный подход, основанный на замене величины сдвига близким значением S. В данной работе построен контрпример, показывающий, что в общем случае оценка погрешности вида $|\Delta\lambda| < K|T-S|$ не возможна при $K = \mathrm{const}$.

О сильных решениях полных эволюционных интегродифференциальных уравнений второго порядка

Закора Д.А.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Изучается задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \mathcal{A}(t)\frac{du}{dt} + \mathcal{B}(t)u + \int_0^t \mathcal{G}(t,s)u(s)\,ds, \quad u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1.$$

в банаховом либо гильбертовом пространстве. При различных ограничениях на операторные коэффициенты в уравнении доказаны теоремы о существовании и единственности сильных решений рассматриваемой задачи Коши.

Об одном аналоге уравнения Бюргерса

Залыгаевой М.Е.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Строится специальное стохастическое возмущение лагранжева описания системы пылевидной материи на плоском n-мерном торе, с диффузионным членом Bw(t), где B - некоторый постоянный линейный оператор, w(t) - винеровский процесс. Доказывается, что при переходе к эйлерову описанию в данном случае возникает аналог уравнения Бюргерса, в котором оператор Лапласа заменен на дифференциальный оператор второго порядка с матрицей следующего вида: матрица оператора B, умноженная на транспонированную матрицу оператора B.

Визуализация аттракторов модели Джеффриса в окрестности течения Пуазейля

Звягин В.Г., Кондратьев С.К.

НИИ математики Воронежского государственного университета (Воронеж, Россия)

В широком смысле под визуализацией аттракторов понимается некоторый способ наглядного графического их представления. Более простой по структуре объект, фазовый аттрактор, лежит в неком (бесконечномерном) функциональном пространстве E; траекторный же аттрактор лежит в пространстве функций, определённых на полуоси $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и принимающих значения в E; иными словами, траекторный аттрактор состоит из параметризованных кривых в E, все точки которых и образуют фазовый аттрактор. Таким образом, к вопросу визуализации можно подходить к двум сторон. С одной стороны, можно считать функции векторами, а сам фазовый аттрактор — точечным множеством в линейном пространстве; тогда имеет смысл изображать проекции фазового аттрактора на конечномерные подпространства пространства E. С другой стороны, можно изображать некоторые функции, принадлежащие фазовому аттрактору, с помощью их графиков. Мы применяем оба способа изображения.

В докладе рассматриваются аттракторы малых возмущений двумерного течения Пуазейля среды, описываемой уравнениями Джеффриса.

В рассматриваемой модели предполагается, что реологическое соотношение Джеффриса имеет вид:

$$\sigma + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \right) = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} \right) \right).$$

Здесь η обозначает вязкость среды, λ_1 — её время релаксации, λ_2 — её время ретардации; η, λ_1 и λ_2 — положительные постоянные, и $\lambda_1 > \lambda_2$.

В докладе показывается, что в рассматриваемой модели приближенно фазовый аттрактор аппроксимируется некоторым количеством компонент, каждая из которых представляет собой объединение семейства гомотетичных эллипсов в вещественном пространстве $L_2(-1, 1)$. (Отметим попутно, что отдельные такие эллипсы являются множествами значений траекторий, приближенно аппроксимирующий траекторный аттрактор.) Эти эллипсы изображаются их проекцией на трёхмерные подпространства пространства $L_2(-1, 1)$, являющиеся линейными оболочками векторов некоторого ортогонального базиса этого пространства. С другой стороны, можно с помощью графиков изобразить функции, задающие полуоси этих эллипсов Пуазейля.

Оценка множества достижимости для гиперболических систем законов сохранения с одной пространственной переменной

Зуев А.Л.

Институт прикладной математики и механики НАН Украины (Донецк, Украина)

Работа посвящена исследованию гиперболических систем с управлением, которые описывают законы сохранения в случае одной пространственной переменной. Рассматриваемый класс систем представлен в виде дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве, для которого исследуется множество достижимости из произвольного начального состояния. Для плотного множества конечных состояний доказана разрешимость краевой задачи в классе функций управления, минимизирующих квадратичный критерий качества вспомогательной конечномерной задачи. Построена оценка множества достижимости с использованием условий компактности семейства управлений.

Развитие образования и науки в Узбекистане: история и современность

Иноятов С.И.

Навоийский государственный педагогический институт (Навоий, Узбекистан)

Обретение Узбекистаном государственной независимости изменило положение в обществе, создало возможности для национального возрождения, развития духовности, образования и науки. История узбекской государственности была заложена 30 веков тому назад. В этом смысле история национальной независимости Узбекистана стоит рядом с историей таких древнейших государств, как Египет, Китай, Индия. Греция, Иран и др. Свидетельством этого является письменный памятник - "Авеста". В 2001 году мировая общественность вместе с народом Узбекистана отметила 2700-летие "Авесты являющейся не только собранием религиозных книг зороостризма, но и сильнейшего уникального историко-научного памятника - творение народов Средней Азии, Ближнего Востока. В "Авесте"уделяется большое внимание силе науки и просвещения, в своеобразной форме разъясняется двадцать лучших качеств нравственности, в том числе стремление к овладению знаниями. Значительных успехов в 1Х-ХП вв. достигли образование и наука, особенно в области точных наук. Так, надо сказать, что уже в это время были созданы Дома мудрости, выполняющие функции академии наук - это "Байт ул-хикма"(Багдад), академия Мамуна (Гурганж), в библиотеке которых насчитывалось более 400 тысяч томов рукописей. При академии работали две обсерватории. Здесь велись научные исследования , совершались важные открытия в области точных наук. Примечательно, что многие ученые, работающие в Академии, были выходцами из Средней Азии. Это, прежде всего, выдающиеся математики ал-Хорезми и ал-Фергани.

Ал-Хорезми - основоположник алгебры - название этого раздела математики взято из его труда "Китаб ал-джабр ва мукабала"("Книга восстановления и противопоставлений") С именем его связано изобретение понятия алгоритма, десятичной системы и понятия нуль.

Еще одним ученым-энциклопедистом был Ахмад Фергани, известный в мире науки, прежде всего как крупный астроном, математик и географ. Проведенные им измерения дуги меридиана помогли определить размер земного шара и внести существенное уточнение в карту мира, основанную на учения Птоломея.

Перу гениального энциклопедиста Абу Райхона Беруни принадлежат более 100 работ, относящихся к самым разнообразным областям науки: астрономии, математики, минералогии, географии, истории и др.Именно Беруни еще за 500 лет до открытия Америки предсказал существование этого континента.

В развитии точных наук этого времени внесли достойный вклад такие ученые, как Абу Али ибн Сино (Авиценна), Умар Хайям, Абу Наср ал-Фароби и др. Пик развития науки и образования достиг в период правления Амира Тимура, внук которого Мирзо Улугбек, построивший в Самарканде обсерваторию, создал звездную карту мира. В ХУ1-Х1Х вв. в Средней Азии продолжали существовать школы двух типов: низшая-мактаб и высшая - медресе. В высшей школе, медресе, изучались первые четыре правила арифметики, а также начатки алгебры и и геометрии (по Эвклиду). Как отмечают путешественники Н. Ханыков и А.Вамбери, в 40-е годы Х1Х в. в бухарских медресе обучались не только представители Средней Азии, но и Индии, Кашмира, Афганистана, России и Китая.

В начале 90-х годов XX века для сохранения позитивных традиций, коренной модернизации системы подготовки кадров и всемерного повышения уровня образовательного потенциала населения Узбекистана была разработана новая модель непрерывного образования, которая нашла отражение в принятых законах республики "Об образовании"и Национальной программы по подготовке кадров. Накопленный опыт и результаты проводимых в Узбекистане реформ в сфере науки и образования были обсуждены на международной конференции "Подготовка образованного и интеллектуально развитого поколения - как важнейшее условие устойчивого развития и модернизации страны в работе которой участвовали более 1000 участников, в том числе 270 представителей из 48 государств мира и 8 международных организаций и образовательных фондов. Один из участников конференции - ректор МГУ им. М.В.Ломоносова - В.Садовничий подчеркнул, что "... Узбекистан первым среди стран СНГ принял на уровне закона и успешно реализует широкомасштабную национальную программу по подготовке кадров, которая является ключевым звеном государственной политики в области развития образовательного и интеллектуального потенциала".

Качественные свойства слабых решений задачи Коши

Калужина Н.С.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, $L^1(\mathbb{R}_+, H)$ - коммутативная банахова алгебра суммируемых на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ со значениями в H комплексных функций со сверткой в качестве умножения. Рассмотрим задачу Коши (1)

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Lu + f(t), t \geq 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $f \in L^1(\mathbb{R}_+, H) \cap C_0(\mathbb{R}_+, H)$, $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$, оператор $L : D(L) \subset H \to H$ имеет дискретный спектр и является самосопряженным. Пусть $L \leq 0$, и 0 - изолированная точка спектра $\sigma(L)$, которая является собственным значением конечной кратности.

Определение 2. *Функция $u \in C_b(\mathbb{R}_+, H)$ называется **медленно меняющейся на бесконечности** функцией (используется обозначение $u \in C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$), если для каждого $t \in \mathbb{R}_+$ выполнено $\lim\limits_{s\to\infty} \|u(t+s) - u(s)\| = 0$.*

Примером является функция $sin(ln(1 + |t|))$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 1. *Каждое слабое решение задачи* (1) *является медленно меняющейся на бесконечности функцией (элементом пространства $C_{sl}(\mathbb{R}_+, H)$).*

Об L-p оценках для решений уравнений движения жидкостей Максвелла

Каразеева Н.А.

Петербургское отделение Математического института им. Стеклова РАН,
Санкт-Петербургский государственный Университет (Санкт-Петербург, Россия)

Рассматривается система уравнений, описывающая двумерное движение жидкостей Максвелла с бесконечным числом времен релаксации и времен запаздывания. Эта система содержит интегродифференциальное уравнение и уравнение несжимаемости. Интегральный член представляет собой свертку с ядром, которое выражается в виде бесконечного ряда убывающих экспонент. Для такой системы исследуется периодическая по пространственным переменным начально-краевая задача, а также задача с условием непротекания. Для обеих задач получены априорные L-p оценки решений и на их основе доказаны теоремы существования решений в соответствующих банаховых пространствах.

Классификация симметрических сужений самосопряженных квантовых графов

Кандагура А.Н., Карпенко И.И.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского
(Симферополь, Украина)

Рассматривается самосопряженный оператор Лапласа $A_{\alpha,\beta} = -\frac{d^2}{dx^2}$, действующий вдоль ребер некоторого метрического графа Γ, с граничными условиями в вершинах. Для исследования спектра таких операторов применим метод граничных троек, который предполагает рассматривать самосопряженный оператор как расширение некоторого симметрического оператора $A_{\min}$, который, вообще говоря, может быть выбран не единственным образом. Была исследована взаимосвязь между структурой графа Γ, согласованного с симметрическим оператором $A_{\min}$ по непрерывности функций, и свойствами оператора $A_{\min}$. В частности, получен следующий результат.

Пусть оператор $A_{\min}$ согласован с графом Γ по непрерывности функций.

(i) *Если граф Γ имеет петлю, то оператор $A_{\min}$ не является простым.*

(ii) *Если граф Γ имеет цикл, все ребра которого имеют рационально соизмеримые длины, то оператор $A_{\min}$ не является простым.*

(iii) *Если граф Γ имеет кратные ребра, причем, хотя бы одна пара из этих ребер имеет рационально соизмеримые длины, то оператор $A_{\min}$ не является простым.*

(iv) *Во всех остальных случаях оператор $A_{\min}$ является простым.*

Кроме того, доказано, что дефектные числа оператора $A_{\min}$ совпадают с порядком графа, что позволяет выбрать минимальную размерность задачи.

Полученные результаты иллюстрируются на примере самосопряженного оператора Лапласа на графе с нелокальными граничными условиями. Были найдены соответствующие матрица Вейля-Титчмарша и граничная тройка.

Спектральный анализ оператора Хилла-Шрёдингера с негладким потенциалом

Карпикова А.В.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Рассматривается одномерный оператор Хилла—Шредингера

$$L(\theta) = L^0 - B : D(L(\theta)) \subset L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi],$$

который определяется дифференциальным выражением

$$l_\theta(y) = -y'' - vy,$$

с областью определения

$$y \in D(L(\theta)) = D(L^0) = \left\{ y \in W_2^2[0,2\pi] : y(2\pi) = e^{i\theta}y(0), y'(2\pi) = e^{i\theta}y'(0), \theta \in [0,2\pi] \right\}.$$

Спектр и собственные функции оператора L^0 имеют следующий вид: $\sigma(L^0) = \{(n+\frac{\theta}{2\pi})^2, n \in \mathbb{Z}, \theta \in [0,2\pi]\}$ — спектр оператора L^0; $E_n^0 = Span\{e_n\}$ — собственное подпространство для собственного значения $(n+\frac{\theta}{2\pi})^2$, где $e_n(t) = e^{i(n+\frac{\theta}{2\pi})t}$.

Замечание 1. *Рассмотрим обратимую изометрию $U(\theta) : L_2[0,2\pi] \to L_2[0,2\pi]$,*

$$(U(\theta)x)(t) = e^{i\frac{\theta}{2\pi}t}x(t), \qquad \theta, t \in [0,2\pi], x \in L_2[0,2\pi].$$

Тогда $U(\theta)D(L_{per}) = D(L(\theta))$ и имеет место равенство

$$L(\theta) = U(L_{per})U^{-1},$$

где $L_{per}x = -x'' - i\frac{\theta}{\pi}x' + \left(\frac{\theta}{2\pi}\right)^2 x - v(t)x$, $\theta \in [0,2\pi]$. Следовательно, оператор $L(\theta)$ подобен оператору $(i\frac{d}{dt} - \frac{\theta}{2\pi}I)^2 - B$ и поэтому изучение спектральных свойств оператора $L(\theta)$ сводится к изучению спектральных свойств оператора L_{per}.

Введем в рассмотрение последовательности

$$\omega_n = v_{-n}v_n, \qquad \widetilde{\omega_n} = p_{-n}p_n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где $p_n = v_{2n} + c_{n,-n}, p_{-n} = v_{-2n} + c_{-n,n}, v_n$ — коэффициенты Фурье ряда $v(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} v_k e^{ikt}$, $t \in [0,2\pi]$.

Элементы $c_{n,n}, c_{-n,-n}, c_{n,-n}, c_{-n,n}, n \in \mathbb{Z}$ матрицы оператора $P_n B\Gamma BP_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$, где $\mathcal{H}_n = ImP_n, n \in \mathbb{Z}_+$ в базисе e_n, e_{-n} представимы в виде

$$c_{n,n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{n-j}\frac{v_{j-n}}{(j+\frac{\theta}{2\pi})^2-(n+\frac{\theta}{2\pi})^2}, \qquad c_{-n,-n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{-(n+j)}\frac{v_{j+n}}{(j+\frac{\theta}{2\pi})^2-(n+\frac{\theta}{2\pi})^2},$$

$$c_{-n,n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{-(n+j)}\frac{v_{j-n}}{(j+\frac{\theta}{2\pi})^2-(n+\frac{\theta}{2\pi})^2}, \qquad c_{n,-n} = \sum_{\substack{j\in\mathbb{Z}\\ |j|\neq|n|}} v_{n-j}\frac{v_{j+n}}{(j+\frac{\theta}{2\pi})^2-(n+\frac{\theta}{2\pi})^2},$$

где $c_{n,n} = c_{-n,-n}$.

Применяя метод подобных операторов для исследования спектральных свойств оператора $L(\theta)$, был получен следующий результат.

Теорема 1. *Существует число $m \in \mathbb{Z}_+$ такое, что спектр оператора $L(\theta)$ представим в виде*

$$\sigma(L(\theta)) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{|n|\geq m+1} \sigma_n(\theta) \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом элементов, не превосходящим $2m+1$, а множества $\sigma_n(\theta)$, $|n| \geq m+1$, не более чем двухточечные и определяются равенством

$$\sigma_n(\theta) = \{(n+\frac{\theta}{2\pi})^2 - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\neq 0\\ k\neq -2n}} \frac{\omega_k}{k(k+2n)} \pm \sqrt{\widetilde{\omega}_n} + \beta_n^{\pm}\}, \qquad |n| \geq m+1, \theta \in [0,2\pi],$$

где $\beta_n^{\pm} = \frac{\alpha(n)}{\sqrt{n}}$, $\sum\limits_{|n|\geq m+1} |\alpha(n)|^{\frac{4}{3}} < \infty$.

Об оценках первого собственного значения задачи Штурма–Лиувилля с краевыми условиями третьего типа и интегральным условием на потенциал

Владимиров А. А., Карулина Е. С.

ВЦ им. А. А. Дородницына РАН, Московский государственный университет экономики, статистики и информатики (Москва, Россия)

Рассматривается задача Штурма—Лиувилля

$$y'' - qy + \lambda y = 0,$$

$$y'(0) - k_0^2 y(0) = y'(1) + k_1^2 y(1) = 0,$$

где $k_1 \geqslant k_0 \geqslant 0$, а функция q принадлежит одному из множеств A_1 или $-A_1$, где $A_1 \rightleftharpoons \{q \in L_1[0,1] : q(x) \geqslant 0,\ \int_0^1 q\,dx = 1\}$. Получены оценки минимального собственного значения $\lambda_1(q)$ этой задачи.

Далее используются обозначения $M_1^- \rightleftharpoons \sup_{q\in -A_1} \lambda_1(q)$ и $m_1^{\pm} \rightleftharpoons \inf_{q\in\pm A_1} \lambda_1(q)$. Через $\boldsymbol{\delta}_\zeta$ обозначается дельта-функция с носителем в некоторой точке $\zeta \in [0,1]$.

Теорема 1. *Если $k_0^2 + k_1^2 \leqslant 1$, то M_1^- достигается на потенциале $q = -k_0^2\boldsymbol{\delta}_0 - k_1^2\boldsymbol{\delta}_1 - (1-k_0^2-k_1^2)$. Если $k_0^2+k_1^2 \geqslant 1$ и $k_1^2 - k_0^2 \leqslant 1$, то M_1^- достигается на потенциале $q = -(1+k_0^2-k_1^2)\boldsymbol{\delta}_0/2 - (1-k_0^2+k_1^2)\boldsymbol{\delta}_1/2$. Если $k_1^2 - k_0^2 \geqslant 1$, то M_1^- достигается на потенциале $q = -\boldsymbol{\delta}_1$.*

Теорема 2. *Величина m_1^+ достигается на потенциале $q = \boldsymbol{\delta}_1$.*

Теорема 3. *Величина m_1^- достигается на потенциале $q = -\boldsymbol{\delta}_\zeta$, где $\zeta \in [0,1]$ определяется из некоторой вспомогательной граничной задачи.*

Подобные задачи ранее рассматривались в работах [1-4].

Работа поддержана РФФИ, проекты №№ 10-01-00423 и 11-01-00989.

Литература

1. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А.// Успехи матем. наук, 1996. Т. 51, № 3. С. 73–144.
2. Винокуров В. А., Садовничий В. А.// Доклады Академии наук, 2003. Т. 392, № 5. С. 592–597.
3. Ежак С. С.// Совр. матем. и ее прилож., 2005. Т. 36. С. 56–69.
4. Карулина Е. С.// Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика. Белгород, 2011. № 23 (118), вып. 25. С. 60–75.
5. Савчук А. М., Шкаликов А. А.// Труды ММО, 2003. Т. 64. С. 159–212.
6. Владимиров А. А.// Журнал выч. матем. и матем. физ., 2009. Т. 49, № 9. С. 1609–1621.

Условия (A) и (B) в пространствах Лоренца-Орлича

Кисель О.С., Пашкова Ю.С.
Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

В работе рассматриваются условия максимальности, минимальности и сепарабельности симметричных пространств Лоренца-Орлича $\mathbf{L}_{\Phi,\Psi}$ измеримых функций на полуоси $[0,\infty)$

Симметричное пространство $\mathbf{X}$ называется

- минимальным, если $\mathbf{X} = cl_{\mathbf{X}}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$
- максимальным, если оно совпадает со вторым ассоциированным пространством: $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{11}$.

Говорят, что в симметричном пространстве $\mathbf{X}$ выполнено

- Условие (A), если из $\{f_n\} \subset \mathbf{X}$, $f_n \downarrow 0$ следует, что $\|f_n\|_{\mathbf{X}} \downarrow 0$;
- Условие (B), если из $\{f_n\} \subset \mathbf{X}$, $0 \le f_n \uparrow$, $\sup\limits_n \|f_n\|_{\mathbf{X}} < \infty$ следует, что $f_n \uparrow f$, где $f \in \mathbf{X}$.

Пусть Φ и Ψ соответственно функции Орлича и Лоренца.

Пространством Лоренца-Орлича называется множество

$$\mathbf{L}_{\Phi,\Psi} = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty :\ \|f\|_{\Phi,\Psi} < \infty\},$$

где

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{\Psi,\Phi}} = \inf\left\{a > 0 :\ \int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{f^*}{a}\right) d\Psi \le 1\right\}.$$

Теорема 1. Пространство $\mathbf{L}_{\Phi,\Psi}$ максимально, в частности, в $\mathbf{L}_{\Phi,\Psi}$ выполнено условие (B).

Теорема 2. Следующие условия эквивалентны

(1) $\mathbf{L}_{\Phi,\Psi}$ — сепарабельно,
(2) $\Psi(0+) = 0,\ \Psi(\infty) = \infty,\ \Phi$ удовлетворяет (Δ_2)-условию.
(3) В $\mathbf{L}_{\Phi,\Psi}$ выполнено условие (A).
(4) $\mathbf{L}_{\Phi,\Psi}$ минимально и $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\Psi(x)}\right)\right)^{-1} = 0.$

Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект № 40.1/008

О классе непосредственно интегрируемых функций

Коваленко А.И., Смолич В.П.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

В теории восстановления (renewal theory), некоторых задачах массового обслуживания возникает необходимость работать с так называемыми непосредственно интегрируемыми по Риману функциями. Авторы собрали воедино разрозненные в математической литературе сведения о функциях этого класса, получили некоторые новые утверждения, обобщили понятие непосредственной интегрируемости по Риману на функции нескольких переменных.

Компетентности студентов математических специальностей с учетом национальной рамки квалификаций

Козлакова Г.А.

Институт высшего образования НАПН Украины (Киев, Украина)

Процесс овладения математическими знаниями и умениями является необходимым условием профессиональной подготовки студентов- математиков к будущей педагогической или научной деятельности, а также их успешного трудоустройства согласно присвоенному после окончания университета уровню квалификации. В соответствии с Рекомендациями Европейского Парламента "Национальная рамка квалификаций"(НРК) означает инструмент для классификации квалификаций в соответствии с перечнем критериев для определения уровней учебных достижений. Целью создания НРК являются интеграция и координация национальных квалификационных подсистем, обеспечение открытости, доступа и повышение качества квалификаций. Утвержденный правительством документ - НРК Украины - имеет общий характер. В нем выделено 10 уровней квалификации - начиная с нулевого уровня (дошкольное образование) и заканчивая докторским уровнем. Каждый из 10 уровней квалификации представлен как интегральная компетентность - обобщенное описание квалификационного уровня, отражающего основные компетентностные характеристики уровня по отношению к обучению и/или профессиональной деятельности. По замыслу авторов, данный документ может стать "квалификационной конституцией нации позволит проявить гибкость и учесть не только имеющиеся квалификации, но и те, что могут появиться в будущем. НРК представляет попытку объединения образовательных и профессиональных квалификаций, что будет содействовать интеграции сферы образовательных услуг и рынка труда. Однако, появление НРК вызывает множество вопросов, которые активно обсуждаются участниками круглого стола на страницах еженедельника "Освіта"(2011-2012 рр.). Отметим наиболее дискуссионные из них: для реального использования НРК необходимо отработать методику ее применения к конкретным направлениям бакалаврской подготовки, например, прикладная математика или программная инженерия; в НРК нет определения уровня квалификации специалиста, которая исторически влияла на отечественную систему высшего образования и отсутствует в идеологии сторонников Болонского процесса; в отличие от НРК Российской Федерации в документе отсутствует сравнение дескрипторов с уровнями формального образования; компетентности выпускников университетов, представленные в НРК и в стандартах ОПП и ОКХ, должны быть изложены в единой терминологии "Национального образовательного глоссария".

Анализ и численное решение нелинейных сингулярных задач для автомодельных решений уравнений пограничного слоя при нулевом градиенте давления

Конюхова Н.Б.,[*] Суков А.И.[**], Соловьев М.Б.[*]

[*]Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, [**]Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе (Москва, Россия)

Излагаются основные результаты [1], [2] в переработанном и дополненном виде: для нелинейного ОДУ третьего порядка, заданного на всей действительной оси, даются корректная постановка сингулярной "начально–краевой" задачи ("НКЗ"), ее достаточно полный математический анализ и численное исследование. Задача возникает в механике вязкой несжимаемой жидкости и описывает автомодельные режимы течений в слоях смешения (см. [3] и цитированные там работы, где, однако, эта задача неточно трактуется как трехточечная краевая задача (КрЗ), а ее исследование сводится методами понижения порядка к сложному анализу двумерной динамической системы на "сфере Пуанкаре" , причем в “нефизических” переменных).

Подход [1], [2] и данной работы, использующий результаты по сингулярным задачам Коши (ЗК), гладким многообразиям и рядам Ляпунова, позволяет уточнить математическую постановку задачи в исходных физических переменных: она разбивается на двухточечную КрЗ на неположительной вещественной полуоси (с неизвестным параметром) и ЗК на положительной полуоси (как продолжение решения КрЗ). Формулируются ограничения на параметр автомодельности, при которых решение этой "НКЗ" существует и единственно; даются двусторонние оценки решения и изучаются его свойства, а также свойства других (регулярных и сингулярных) решений нелинейного ОДУ для разных значений параметра автомодельности; приводятся результаты расчетов. Дополнительно к результатам [1], [2] дается постановка исходной задачи для двумерных стационарных уравнений пограничного слоя (при нулевом градиенте давления), заданных в безграничном пространстве, решение которой в классе автомодельных функций приводит к задаче [3]. Кроме того, наряду с вычислениями функции тока в автомодельной переменной, приводятся расчеты траекторий движения частиц в плоскости течений. Самостоятельный математический и физический интерес представляет сопутствующая двухточечная КрЗ на неположительной вещественной полуоси, имеющая, в частности, точные решения для некоторых значений параметра автомодельности; расчетные картины течений для известных здесь задач также ранее не приводились.

Работа поддержана РФФИ, код проекта 11–01–00219.

Список литературы

[1] Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Суков А. И. *О сингулярной задаче для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка, возникающего в гидродинамике*// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47, N 7. С. 1158–1178.

[2] Konyukhova N. B., Sukov A. I., Soloviev M. B. *Singular nonlinear problems for self–similar solutions to the boundary layer equations with a zero pressure gradient*// Intern. Scientific Journal Spectral and Evolution Problems. 2009. V. 19. P. 143–155.

[3] Диесперов В. Н. *Исследование автомодельных решений, описывающих течения в слоях смешения*// Прикл. матем. и мех. 1986. Т. 50, N 3. С. 403–414.

Тематическое планирование и конспекты уроков по математическому анализу (часть 2)

Коренева Л.В., Кушнерева Г.И.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

Пособие предназначено для студентов 2 курса математического факультета и является продолжением ч.1. Содержит разбивку тем и подбор задач для решения в аудитории, а также для домашнего задания. Может быть полезно студентам, пропустившим занятия, молодым преподавателям, а также для самостоятельного обучения. Подобное пособие важно,если практические занятия ведутся на потоке различными ассистентами для согласования тем и подготовке к контрольным работам стандартного образца. Методичка аппробирована в ТНУ им.В.И.Вернадского.

Индуцированные представления бесконечномерных групп

Косяк А.В.

Институт математики НАНУ (Киев, Украина)

Индуцированные представления были введены и изучены для конечных групп Фробениусом, для локально-компактных групп Макки [1]. Мы обобщаем понятие индуцированных представлений на бесконечномерные группы. Индуцированное представление для бесконечномерных групп определено неоднозначно, в отличие от локально-компактных групп. Оно зависит от выбора G-квазиинвариантной меры μ на подходящем пополнении $\tilde{X} = \tilde{H}\backslash\tilde{G}$ пространства $H\backslash G$, от двух пополнений $\tilde{H}$ и $\tilde{G}$ подгруппы H и группы G и от продолжения $\tilde{S}: \tilde{H} \to U(V)$ представления $S: H \to U(V)$. Метод орбит А.А. Кириллова [2] описывает все неприводимые унитарные представления конечномерной нильпотентной группы G_n. Введенное понятие позволяет для "нильпотентной" группы $B_0^{\mathbb{Z}} = \varinjlim_n G_{2n-1}$ бесконечных в обе стороны матриц, начать развитие аналога метода орбит.

Список литературы

[1] G.W. Mackey, *Imprimitivity for representations of locally compact groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.U., **35** (1949), 537–545.

[2] А.А. Кириллов, *Введение в теорию представлений и некоммутативный гармонический анализ*, ВИНИТИ, М., 1988.

Асимптотика решения уравнения для эллиптического синуса при k«1

Красильников А.В.

Челябинский Государственный Университет (Челябинск, Россия)

В работе исследуется асимптотическое решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(2x^3 - x), \tag{1}$$

где ε - малый параметр. Основной проблемой является построение асимптотического решения (1) на бóльших временах. Сводя данное уравнение к системе уравнений с быстро вращающейся фазой, удается при помощи метода Нейштадта разделить переменные до нужного порядка по ε, что, в свою очередь дает асимптотическое разложение решения на больших временах.

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Высокочастотные асимптотики

Крутенко Е.В.

Ростовский-на-дону автодорожный колледж (Ростов-на-Дону, Россия)

Рассматривается задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с высокочастотными слагаемыми. При этом амплитуды некоторых слагаемых пропорциональны положительным степеням частоты: в случаи стационарного коэффициента показатель старшей степени p, а осциллирующих – $\frac{2p-1}{2}$, p – натуральное число больше 2. Построена и обоснована полная асимптотика решения. Случай $p = 1$ рассмотрен в статье [1], а случай $p = 2$ - в [2], [3]. Аналогичное уравнение, но без высокочастотных слагаемых и для чётных натуральных p исследовано в монографии Н.Н. Моисеева [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№12-01-00402-а).

Список литературы

[1] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.*Асимптотический анализ некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с большим параметром //Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009, Т.49, №12, с. 1-13.

[2] *Крутенко Е. В., Левенштам В. Б.* Асимптотика решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с большими слагаемыми //Сибирский математический журнал. 2010, Т. 51, №1, с. 74-89.

[3] *Левенштам В. Б.* Асимптотический анализ линейных дифференциальных уравнений с большим параметром. Резонансный случай //ибирский математический журнал. 2012, Т. 53, №1, с. 124-131.

[4] *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1981.

Управляемая дуополия Курно при неопределенности

Кудрявцев К.Н.

Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Россия)

Рассматривается многошаговая конкурентная позиционая математическая модель взаимодействия двух продавцов на рынке сбыта с учетом ожидаемого появления импорта. Модель формализуется как многошаговая бескоалиционная игра двух лиц при неопределенности. В качестве решения игры используется понятие гарантированного по Парето равновесия (подход к определению которого основан на понятии векторного максимина). Методом динамического программирования найден явный вид указанного решения.

Изоморфизм двух представлений самосопряженной дилатации диссипативного оператора

Кудряшов Ю.Л.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

Рассматривается спектральное представление самосопряженной дилатации диссипативного оператора и представление только для ограниченного диссипативного оператора. В случае ограниченного оператора непосредственно построен изоморфизм указанных представлений дилатации.

Нелинейное поведение идеальных упругопластических тел

Кузнецов Е.Б.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) МАИ (Москва, Россия)

Рассматривается геометрически и физически нелинейная задача квазистатического деформирования тел из идеального упругопластического материала. После дискретизации уравнений методом конечных элементов по пространственной переменной задача определения равновесных конфигураций сводится к интегрированию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В предельном состоянии тела из идеального упругопластического материала задача становится сингулярной. В качестве регуляризации применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру, что позволяет находить решение задачи в предельных состояниях тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00013).

Теория случайных графов и современные компьютерные сети

Кузюрин Н.Н.

ИСП РАН (Москва, Россия)

Теория случайных графов стала интенсивно развиваться с конца 50-х годов прошлого века после публикации цикла статей Эрдеша-Реньи об эволюции случайных графов. В рассмотренной ими модели все ребра появляются случайно и независимо с одинаковой вероятностью p и под эволюцией понимается изменение свойств графов с ростом вероятности $p = p(n)$ как функции от числа вершин n. Оказалось, что в некоторых значениях p происходит так называемый фазовый переход и свойства графа кардинально меняются. В этом направлении было получено много интересных и глубоких результатов. Однако, в начале 2000-х выяснилось, что модель Эрдеша-Реньи плохо описывает реальные графы, возникающие в различных областях, в биологии, Интернете, в анализе различных компьютерных социальных сетей — Facebook, Twitter и т.п. Это породило многочисленные исследования новых математических моделей случайных графов – так называемых безмасштабных сетей, в которых число вершин удовлетворяет степенному закону, т.е. число вершин данной степени d пропорционально величине $O(nd^{-\beta})$, где β называется показателем модели. В докладе будут рассмотрены некоторые из таких моделей и представлены результаты об их свойствах.

Уравнение Брэдли-Харпера - одна из математических моделей эрозии поверхности при ионной бомбардировке

Куликов А.Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия)

Рассмотрены две краевые задачи для нелинейного уравнения, которое описывает эволюцию рельефа под воздействием ионной бомбардировки. Это уравнение в микроэлектронике принято называть уравнением Брэдли-Харпера или обобщенным уравнением Курамото-Сивашинского. Показано, что в обеих краевых задачах неоднородные диссипативные структуры возникают при смене устойчивости однородных состояний равновесия. Приводятся асимптотические формулы для решений, формирующих волновые структуры, а также другие типы неоднородного рельефа мишени.

Нелокальное уравнение эрозии и формирование нанорельефа

Куликов Д.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова (Ярославль, Россия)

Рассматривается нелинейное уравнение эрозии, которое появилось относительно недавно как уравнение, описывающее формирование нанорельефа под воздействием потока ионов. Это уравнение является математической моделью отличной от уравнения Брэдли-Харпера и призвано уточнить последнее при формировании неоднородного рельефа в нанодиапазоне. В случае периодических краевых условий изучен механизм формирования волнового нанорельефа. При решении соответствующей бифуркационной задачи использован метод нормальных форм. Алгоритмы построения нормальных форм можно рассматривать как соответствующую модификацию метода Крылова-Боголюбова.

Автоколебания существенно нелинейной системы

Кумакшев С.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия)

Исследованы автоколебания сильно нелинейной системы, возвращающая сила которой описывается кубической функцией смещения. Механизм возбуждения принимается стандартного вида, как в осцилляторе Ван дер Поля. Для малых и умеренно больших значений коэффициента обратной связи разработан эффективный численно-аналитический метод расчёта основных характеристик колебаний: периода, амплитуды, траектории и предельного цикла. Проведён анализ автоколебаний; установлены механические эффекты, имеющие качественный характер.

Обратная задача вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом

Задорожний В.Г., Курина Г.А.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Найдены условия разрешимости обратной задачи вариационного исчисления для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом специального вида, а также получена формула для функционала обратной задачи, задаваемого интегралом, который отличается от стандартного наличием запаздывающего аргумента у искомой функции.

Литература

В.Г. Задорожний, Г.А. Курина. Математические заметки. 2011. Т. 90. С. 231 - 241.

Условия подчиненности одного минимального дифференциального оператора тензорному произведению других в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^n)$

Лиманский Д.В.

Донецкий национальный университет (Донецк, Украина)

Рассматривается задача об описании линейного пространства $L(P)$ минимальных дифференциальных операторов $Q(D)$ с постоянными коэффициентами, подчиненных в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-норме тензорному произведению

$$P(D) := P_1(D_1, \dots, D_{p_1}, 0, \dots, 0) \cdot P_2(0, \dots, 0, D_{p_1+1}, \dots, D_n).$$

Подчиненность означает, что операторы $Q(D)$ и $P(D)$ удовлетворяют следующей априорной оценке:

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C_1 \|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad \forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 1 (2)**.** *Пусть $P(D) = P(D_1, D_2) := p_1(D_1)p_2(D_2)$, где $p_1(\xi_1)$ — полином степени $l \ge 1$, все нули которого вещественные и простые, $p_2(\xi_2)$ — произвольный полином степени $m \ge 1$. Тогда включение $Q \in L(P)$ эквивалентно равенству*

$$Q(D) = P(\xi)\frac{q(\xi_2)}{p_{22}(\xi_2)} + r(\xi_1),$$

где $p_{22}(\xi_2)$ — невырожденный делитель $p_2(\xi_2)$ максимальной степени; $q(\xi_2)$ — произвольный полином степени $\le s := \deg p_{22}$; $r(\xi_1)$ — произвольный полином степени $\le l-1$, если $s = m$, и произвольная постоянная $r(\xi_1) \equiv r$, если $s < m$. При этом $\dim L(P) = m + l + 1$ в первом случае и $\dim L(P) = s + 2$ во втором.

Литература

1. Д.В. Лиманский, М.М. Маламуд. Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева // Матем. сборник. 2008. Т. 199. № 11. С. 75-112.

2. Д.В. Лиманський. Умови підпорядкованості для тензорного добутку двох звичайних диференціальних операторів // Доповіді НАН України. 2012. № 4. С. 25-29.

Фрактальная структура гиперболических липшицевых динамических систем

Локуциевский Л.В.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

На докладе будут обсуждаться динамические системы не обладающие какой-либо гладкой структурой. Точнее, будут построены условия “гиперболичности” динамической системы в терминах липшицевых констант отображения. Интерес представляет теорема о полусопряженности липшицевой динамической системы с соответствующей марковской топологической цепью. Будет обсуждаться новый способ вычисления оценок Хаусдорфовой и Колмогоровской размерностей множества неблуждающих точек по марковскому разбиению с использованием только констант Липшица.

О языке компонентной сети Петри

Лукъянова Е.А.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Моделирование реактивных распределённых систем компонентной сетью Петри (CN-сетью) эффективно упрощая детальную (базовую) модель исследуемой системы, сохраняя при этом адекватность полученной модели исходной системе, позволяет значительно уменьшить объём дискретной информации, задействованной в процессе нахождения сетевых инвариантов и ускорить процесс установления структурных свойств на модели.

Проблемы, связанные с анализом динамики функционирования системы, с характером множеств возможных последовательностей реализации событий можно решать на уровне языков сетей Петри. Модель исследуемой системы в виде CN-сети можно охарактеризовать соответствующим классом порождаемого им языка, кодирующего различные возможные способы функционирования системы. При этом, выявление, в результате компонентного моделирования, одинаковых или однотипных составных компонент (компонент-мест Cp и компонент-переходов Ct) позволяет говорить о рассматриваемом языке, как о языке компактного представления языков сетей Петри. Это даст теоретические возможности выявления набора компонент, образующего алфавит языка, который описывает структуру систем с параллелизмом, а так же обеспечит явные преимущества для анализа модели по заданному языку.

Факторы формирования нового качества общества в системе непрерывного образования

Маманазаров А.Б.

Филиал МГУ им. М.В.Ломоносова в г. Ташкент (Ташкент, Узбекистан)

Образовательный и научный потенциал жизненно важен для каждой страны, государства, нации и личности, поэтому его надо максимально увеличивать, так как богатство республики составляют его граждане и, в первую очередь, высокообразованные, высоконравственные, творческие, гармонично развитые личности. Программы ООН, ЮНЕСКО в области образования направлены на достижение этих целей. Международная комиссия ЮНЕСКО по образованию для XXI века утверждает, что обучение на протяжении всей жизни и членство в обществе знаний играют ключевую роль в решении задач, которые ставит быстро меняющийся мир. Комиссия определяет четыре основных навыка образования: научиться жить вместе, научиться познавать, научиться делать, научиться жить [1]. В выводах Международной комиссии подчёркивается важность образования в течение всей жизни, а также новых целей образования, участия в обществе знаний и умений, основанном на создании знаний и обмене ими, появление новых умений и навыков, которые определяют успешность человека в обществе.

На решение поставленных задач нацелены Указы Президента Узбекистана, Постановления и Распоряжения Кабинета Министров республики, других государственных, общественных, неправительственных объединений и т.д. Так, в 2011 году была утверждена Программа модернизации материально-технической базы высших образовательных учреждений и кардинального улучшения подготовки специалистов на 2011-2016 годы, сосредоточившая усилия на улучшение научно-исследовательского потенциала вузов, росте профессионализма профессорско-преподавательского состава, совершенствование содержания высшего образования, унификации и агрегации направлений бакалавриата и специальностей магистратуры.

24 июля 2012 года Президент Республики Узбекистан Ислам Каримов подписал Указ, "О дальнейшем совершенствовании системы подготовки и аттестации научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации". Главный смысл данного указа сводится к отмене степени кандидата наук и введению единой степени доктора наук. Данная система будет введена с 1 января 2013 года "в соответствии с общепринятыми международными требованиями и стандартами".

Расширяются экономические, творческие, культурно-просветительские, образовательные связи Узбекистана с другими странами мира. Об этом свидетельствует открытие и функционирование вузов с других стран. Так, успешно осуществляют свою деятельность Филиалы ряда Российских вузов в г.Ташкенте, Туринского политехнического института, Международного Вестминстерского университета, Сингапурского института развития менеджмента.

Таким образом, вузовское образование в республике готовит не только специалистов высокого уровня, а готовит главное богатство страны, то есть высокообразованных, высоконравственных, гармонично развитых личностей и обеспечивает права и свободы молодёжи на образование, творчество и самореализацию. Это жизненно важно для защиты стратегических интересов государства и народа республики, для сохранения правового, демократического, светского статуса Узбекистана, для сохранения межнационального согласия и межконфессиональной толерантности, социального партнерства и мира, стабильности, прогресса, модернизации, для самосохранения её в процессе глобализации

Литература

1. Delors, J. Et al (1999). Learning: The treasure within. Paris: UNESCO. 2. Указ Президент Узбекистана Ислама Каримова "О дальнейшем совершенствовании системы подготовки и аттестации научных и научно-педагогических кадров высшей квалификации". 24 июля 2012 года // Народное слово. - Ташкент, 2012. - 25 июля.

Об обратимости одного класса несамосопряженных операторов

Марюшенков С.В.

Воронежский государственный технический университет (Воронеж, Россия)

В данной работе получены условия обратимости несамосопряженного оператора $L = A - B$, где A– антисамосопряженный, а B– нормальный оператор; а также рассмотрены приложения, в том числе к дифференциальным операторам.

Системная инженерия проектов информатизации организационных систем

Маслянко П.П.

Национальный технический университет Украины
"Киевский политехнический институт" (Киев, Украина)

Системная инженерия проектов информатизации организационных систем (Орг.С) охватывает все этапы жизненного цикла информационно-коммуникационных систем. Итеративно-инкрементный процесс разработки обеспечивает выделение множества сущностей реализации проекта информатизации Орг.С, разработку бизнес-модели. Процесс бизнес-моделирования реализуется с помощью бизнес-профиля.

Усреднение задачи Коши для параболического уравнения с периодическими коэффициентами

Мешкова Ю.М.

Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия)

Рассматривается вопрос об усреднении периодической параболической задачи Коши. Мы опираемся на теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам гомогенизации, развитый в цикле работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной. Изучается широкий класс матричных эллиптических дифференциальных операторов второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Задача сводится к изучению аппроксимации соответствующей операторной экспоненты по норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Доказана сходимость решений задачи с быстро осцилирующими коэффициентами к решениям т. н. „усреднённой“ задачи. Полученные оценки точны по порядку, оценочные постоянные контролируются явно в терминах данных задачи.

Задача Коши для дифференциально-разностных уравнений параболического типа

Муравник А.Б.

Исследуется задача Коши для дифференциально-разностных параболических уравнений второго порядка. Доказывается существование классических решений и устанавливаются их классы единственности. Указанные решения представляются интегральными формулами пуассоновского типа. Изучаются качественные свойства найденных решений: в условиях сильной эллиптичности соответствующих функционально-дифференциальных операторов доказываются теоремы о их неклассической (весовой асимптотической) близости к решениям некоторых дифференциальных параболических уравнений.

Максимальные коммутативные $*$-подалгебры в алгебрах локально измеримых операторов

Муратов М.А., Чилин В.И.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина),
Национальный университет Узбекистана (Ташкент, Узбекистан)

Пусть M — произвольная алгебра фон Неймана, $LS(M)$ — $*$-алгебра всех локально измеримых операторов, присоединенных к M и $t(M)$ - топология сходимости локально по мере в *LS(M)* [1]. Для каждого подмножества $A \subset LS(M)$

через $A' = \{y \in LS(M) : xy = yx \text{ для любого } x \in A\}$ обозначается коммутант множества A в алгебре $LS(M)$. Поскольку операция умножения в алгебре $LS(M)$ непрерывна относительно топологии $t(M)$, то коммутант A' всегда замкнут в топологии сходимости локально по мере $t(M)$. В случае, когда M есть алгебра $B(H)$ всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H, алгебра $LS(M)$ совпадает с M, а топология $t(M)$ есть равномерная топология в $B(H)$ [1]. Поэтому, в этой ситуации, существуют замкнутые в топологии $t(M)$ коммутативные $*$ - подалгебры A в $LS(M)$, самосопряженная часть которых $A_h = \{x \in A : x^* = x\}$ не является векторной решеткой относительного частичного порядка, индуцированного из $LS_h(M)$. В то же время верна следующая

Теорема 1. *Если M - конечная алгебра фон Неймана, то для любой коммутативной $*$ - подалгебры A в $LS(M)$, замкнутой в топологии $t(M)$, ее самосопряженная часть A_h является условно полной векторной решеткой относительного частичного порядка, индуцированного из $LS_h(M)$.*

Следующая теорема описывает свойства максимальных коммутативных $*$ - подалгебр в $LS(M)$.

Теорема 2. *Если A — максимальная коммутативная $*$-подалгебра в $LS(M)$, то*

(i). $A = A'$;

(ii). $A_b = A \cap M$ есть коммутативная подалгебра фон Неймана в M, а сама алгебра A является заполненной $*$-подалгеброй в $LS(A_b)$;

(iii.) A_h есть условно полная векторная решетка относительно частичного порядка, индуцированного из $LS_h(M)$, при этом, если M — конечная алгебра фон Неймана, то A_h — расширенная условно полная векторная решетка.

Следует отметить, что в случае не конечных алгебр фон Неймана M, свойство расширенности векторных решеток A_h для максимальных коммутативных $*$-подалгебр A в $LS(M)$, вообще говоря, не выполняется. Более точно, верна следующая

Теорема 3. *Если для любой максимальной коммутативной $*$-подалгебры A в $LS(M)$ векторная решетка A_h является расширенной, то M - конечная алгебра фон Неймана.*

Работа выполнена при частичной поддержке гранта ГФФИ, проект № 40.1/008

Литература

1. Муратов М.А., Чилин В.И. Алгебры измеримых и локально измеримых операторов. Труды института математики НАН Украины. Киев. Т.69. 2007.

Обобщенные и классические решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений

Неверова Д.А.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

В настоящей работе рассматривается краевая задача

$$-\frac{d^2}{dt^2}R_0u(t) + \frac{d}{dt}R_1u(t) + R_2u(t) = f(t) \qquad (t \in (0,d)) \tag{1}$$

с однородным краевым условием

$$u(t) = 0 \quad (t \in \mathbb{R} \setminus (0,d)), \tag{2}$$

где R_i — разностные операторы, определенные по формуле

$$R_i u(t) = \sum_{j=-m}^{m} b_{ij} u(t+j) \qquad (i = 0, 1, 2). \tag{3}$$

Здесь m — натуральное число, b_{ij} — вещественные числа.

Мы исследуем вопрос о том, при каких условиях на коэффициенты уравнения краевая задача (1),(2) будет иметь классическое решение для любых непрерывных правых частей при условии, что существует обобщенное решение рассматриваемой задачи. Оказывается, необходимым и достаточным условием этого является отсутствие сдвигов аргументов в производных неизвестной функции, входящих в уравнение, т. е. равенства $b_{ij} = 0$ $(i = 0, 1; j = \pm 1, \ldots, \pm m)$.

Анализ чувствительности многокритериального выбора методами теории важности критериев к изменению границ интервалов относительной важности

Нелюбин А.П.

Институт машиноведения им. А.А.Благонравова РАН (Москва, Россия)

Выбор лучших альтернатив из множества возможных при наличии нескольких критериев осуществляют на основе предпочтений лица, принимающего решение (ЛПР). Однако в большинстве случаев дать точную оценку своих предпочтений затруднительно. Поэтому на практике после вычисления решения проводят анализ его чувствительности к изменению параметров, отражающих предпочтения ЛПР.

В теории важности критериев, созданной и активно развиваемой в России, разработана итеративная процедура сбора и анализа информации о важности критериев, в ходе которой ЛПР уточняет свои предпочтения от качественных до количественных, причем в наиболее доступной форме – интервальной. То есть оцениваются не точечные значения степеней превосходства одних критериев над другими, а лишь интервалы их возможных значений. В представляемой работе в рамках указанного подхода анализируется чувствительность многокритериального выбора к изменению границ этих интервалов.

Предложен аналитический метод оценки чувствительности по каждому интервалу в отдельности, когда прочие интервалы фиксированы. При анализе в общем случае возникает нелинейная оптимизационная задача, которую удается свести к задаче математического программирования.

Управление в форме синтеза для приведения линейной системы в положение равновесия

Овсеевич А.И.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН (Москва, Россия)

Рассмотрена задача построения закона управления по обратной связи для приведения линейной системы в положение равновесия. Управление предлагается ограниченным и переводит любое состояние системы в окрестности начала координат в начало координат за конечное время. Его конструкция основана на понятии общей функции Ляпунова. Установлено наличие общей квадратичной функции Ляпунова для двух конкретных устойчивых линейных систем. Найдены некоторые замечательные свойства этой функции.

Об интерполяции подпространств

Овчинников В.И.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Для подпространств коразмерности единица найдены новые условия сохранения нормы при вещественной интерполяции в невложенных парах банаховых пространств.

Вариационные задачи в шкале соболевских пространств

Орлов И.В.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Хорошо известно, что переход от классических экстремальных вариационных задач к задачам с негладким аргументом связан с радикальным ухудшением аналитических свойств основного вариационного функционала. Начиная с основополагающих работ Л. Тонелли в 20-х гг. прошлого века, при исследовании таких задач применяются, как правило, так называемые "прямые методы". Эти методы, активно применяемые и сегодня, позволяют обойтись без классических аналитических условий экстремума, но взамен используют, в той или иной степени, достаточно жесткие требования выпуклости функционала по главной переменной и степенного роста интегранта, отвечающего порядку пространства Соболева.

В нашем докладе рассмотрен другой подход, подход квазиклассического типа. Именно, выяснено, что при достаточно общих условиях вариационные функционалы в пространствах Соболева обладают так называемыми компактно–аналитическими (K–аналитическими) свойствами. Это позволяет получить аналоги классических вариационных соотношений для случая так называемых компактных экстремумов вариационных функционалов, более слабых, чем локальные экстремумы.

Следующей особенностью подхода является рассмотрение задачи не в фиксированном пространстве Соболева, а на максимально допустимом отрезке шкалы соболевских пространств $W^{1,p}$, $1 \leqslant p < \infty$. При этом возникает ситуация "спектрального типа":

1) Вблизи значения p, при котором в $W^{1,p}$ достигается K–экстремум, этот экстремум также достигается.
2) "Достаточно далеко" после данного значения p (на расстоянии компактного вложения в $W^{1,p}$) K–экстремум переходит в локальный экстремум.
3) "Достаточно далеко" до данного значения p (на расстоянии компактного вложения от $W^{1,p}$) отсутствие локального экстремума в $W^{1,p}$ влечет отсутствие даже K–экстремума в рассматриваемом пространстве.

Аналогичный факт справедлив и для других K–аналитических свойств. Таким образом, исследование K–аналитических свойств вариационного функционала является ключом, позволяющим определить и наличие соответствующих классических аналитических свойств в подходящих пространствах Соболева. Как правило, классические аналитические свойства (включая локальные экстремумы) возникают за счет определенного "вырождения" интегранта функционала по отношению к порядку пространства.

В докладе описаны также обширные классы вариационных функционалов, достигающих нелокального K–экстремума и представлены достаточно общие условия исключения уравнения Якоби и условия Якоби в экстремальных вариационных задачах в шкале пространств Соболева.

Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях с узкой щелью

Пальцев А.Б.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН (Москва, Россия)

Рассмотрена однородная задача Дирихле для уравнения Пуассона с постоянной правой частью $\Delta U_\varepsilon = -a$ в области g_ε, имеющей узкую щель ширины 2ε с параллельными сторонами и дном произвольной формы. Найдена равномерная внутри области g_0 асимптотика решения U_ε этой краевой задачи, а также асимптотика его градиента ∇U_ε на дне щели при $\varepsilon \to 0$. Установлено, что главный член возмущения решения при малых ε имеет порядок $\varepsilon \ln \varepsilon$, а главный член указанной асимптотики градиента пропорционален $\varepsilon^{-1/2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837).

Асимптотическое построение локализованных решений уравнений Максвелла (пучков) в среде с периодически изменяющимися параметрами

Перель М.В.

СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Распространение электромагнитных волн в среде с периодическими меняющимися параметрами при фиксированной частоте описывается системой Максвелла. Работа посвящена построению формальных асимптотических разложений решений специального вида, при частотах, соответствующих седловым точкам дисперсионных поверхностей. Изучаются решения, гауссовски локализованные вблизи прямых. Каждое такое решение является суперпозицией Блоховских решений. Обсуждаются физические следствия полученных результатов.

Уравнения свертки для операторов S и $\Phi = aS + bI$

Петров В.Э.

ООО "ТВЭЛЛ"(Санкт-Петербург, Россия)

Сингулярные операторы, содержащие интеграл типа Коши S, рассматриваются, как интегральные преобразования. Выписывается формула Парсеваля. Операторы $K = SVS$ ($K[u] = SVSu$) и $R = \Phi^{-1}\hat{w}\Phi$, где V — оператор умножения на S-образ функции v, а $\hat{w}$ — оператор умножения на Φ-образ функции w, интерпретируются как свертки функций $u * v$ и $u * w$. В результате некоторые линейные и нелинейные сингулярные уравнения удается записать, как уравнения свертки. Например, характеристическое линейное сингулярное уравнение на контуре оказывается уравнением свертки для оператора S, а уравнение $a(S[u](z))^2 + bS[u^2](z) = f(z)$ — сверткой для оператора Φ.

След разности сингулярных операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами, содержащими дельта функции Дирака

Печенцов А.С.

МГУ им. М.В.Ломоносова (Москва, Россия)

В лекции будет вычислен след разности двух сингулярных операторов Штурма-Лиувилля с потенциалами, содержащими дельта функции Дирака. Особенность рассматриваемого случая заключается в том, что оба оператора помимо дискретного спектра имеют непрерывный спектр.

Математические модели геофизических процессов в ближнем космосе

Пивоваров В.Г.

Московский государственный технический университет приборостроения и информатики (Москва, Россия)

Постоянное излучение Солнца определяет потоки энергии, поступающие от Солнца на поверхность Земли и в Земную атмосферу. Эти энергетические потоки создают необходимые условия для существования биосферы и ноосферы. Однако наряду с постоянными энергетическими потоками от Солнца на Землю приходят флуктуирующие потоки вещества и электромагнитных полей, определяемые активностью Солнца. Эти потоки плазмы - Солнечный ветер оказывают заметное влияние на всю внешнюю плазменную оболочку Земли - магнитосферу и на глубинные слои околоземного пространства - ионосферу, атмосферу, биосферу и даже на литосферу. Доказано, что динамические процессы в литосфере, такие как извержения вулканов и землетрясения, подвержены влиянию динамических процессов на Солнце - солнечной активности.

Механизмы этого влияния, причинно-следственные связи между солнечными процессами и процессами в земных оболочках изучены недостаточно. Однако важность такого влияния на жизнь людей и биосферу вообще очень трудно переоценить. В силу этого за последние несколько десятилетий в связи с развитием космических исследований было получено большое количество экспериментальной информации, подтверждающей солнечно-земные связи, уточняющие и детализирующие их. Это позволяет ставить вопрос о создании единой физико-математической модели солнечной-земных связей, в рамках которой возможно создание прогностических моделей динами различных процессов в окрестности Земли и на ее поверхности.

Инициатором разработки такой модели был академик М.В. Келдыш, который просил академика Г.И. Марчука организовать и возглавить эти работы в Сибирском отделении Академии наук СССР. За короткое время была создана группа молодых исследователей, тогда ещё студентов Новосибирского университета, и выполнены предварительные работы по поиску путей решения центральной проблемы солнечно-земных связей - "Взаимодействие солнечного ветра с магнитным полем Земли". Стала ясна общая структура исследований по этой проблеме, которая естественным образом разбивалась на ряд независимых блоков.

Первым из них был блок, посвященный магнитогидродинамическому обтеканию солнечного ветра мягкой поверхности магнитосферы - магнитопауза, удерживаемой магнитосферным магнитным полей. Главным источником геомагнитного поля является магнитный диполь, но кроме того в геомагнитное поле давали вклады токи, текущие по магнитопаузе, и токи внутри самой магнитосферы. Их суперпозиция и формирует геомагнитное поле. Трудность состоит в том, что токи на магнитопаузе и в магнитосферной плазме определяются в результате взаимодействия потока солнечного ветра с геомагнитным полем. Поэтому необходимо одновременно рассчитывать и магнитосферное поле, и магнитное поле внутри магнитосферы. Такой расчет представлял собой полностью самостоятельный блок, который требовал разработки соответствующей математической модели и методов ее численного решения.

В результате накопленных экспериментальных данных стало ясным, что динамика магнитосферной плазмы и вся электродинамическая структура магнитосферы определяется вязким взаимодействием солнечного ветра с магнитосферной плазмой и с вращающейся внутри магнитосферы земной атмосферы. Исследование вязкого взаимодействия солнечного ветра с магнитосферной плазмой. А также исследование эффектов вращения Земли, представляли собой два самостоятельных блока.

Во время сильных возмущений в солнечном ветре в полярных областях атмосферы происходят грандиозные изменения в верхней атмосфере: появляются мощные корпускулярные потоки вдоль силовых линий магнитного поля, возникают полярные сияния, ионосферная проводимость возрастает на несколько порядков, появляются электрические поля и токи, наблюдаются сильные возмущения магнитного поля. Расчет по заданным электрическим полям и проводимости ионосферы токов и магнитных возмущений представляет собой значительные трудности и выделен в самостоятельный блок. К этому же блоку относится классическая задача о расчете электрических полей и токов по заданной системе ветров в верхней атмосфере - динамо-теория.

На пути решения этих задач возникли не только математические и вычислительные трудности. Но и плохое понимание в ряде случаев физических механизмов и причин, вызывающих те или иные явления. Исследования, выполненные группой сотрудников, затронули все перечисленные задачи. Цель данного доклада - рассказать о перечисленных выше задачах, их математических моделях, методах их исследования и некоторых результатов.

О существовании и единственности элемента наилучшего приближения в среднем со знакочувствительным весом

Покровский А.В.

Институт математики НАН Украины (Киев, Украина)

Найдены необходимые и достаточные условия, при которых каждая непрерывная функция на отрезке имеет единственный элемент наилучшего приближения в среднем с заданным непрерывным знакочувствительным весом, носитель которого совпадает со всем отрезком, элементами чебышевского пространства

О спектральных разложениях и асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвертого порядка

Поляков Д.М.

Воронежский Государственный университет (Воронеж, Россия)

В гильбертовом пространстве $L_2[0,1]$ рассматривается дифференциальный оператор

$$L : D(L) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1],$$

который определяется следующим дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}y = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y, \qquad a, b \in L_2[0,1],$$

с областью определения

$$y \in D(L) = \left\{ y \in W_2^4[0,1] : y(0) = y(1) = 0, y''(0) = y''(1) = 0 \right\}.$$

С помощью метода подобных операторов получены асимптотика собственный значений, оценки равномерной безусловной равносходимости спектральных разложений для свободного и возмущенного оператора.

О $*-$представлениях класса алгебр полиномиального роста, связанных с графами Кокстера

Попова Н.Д.

Институт математики НАН Украины (Киев)

В гильбертовом пространстве H мы изучаем конфигурации его подпространств, связанные с графами Кокстера $\mathbb{G}_{s_1,s_2}$, $s_1, s_2 \in \{4,5\}$, которыми могут быть любые деревья, такие что одно ребро имеет тип s_1, другое — тип s_2, а остальные — типа 3. Доказывается, что такие неприводимые конфигурации существуют только в конечномерных H, где размерность H не превышает удвоенного числа вершин. Дается описание всех неприводимых неэквивалентных конфигураций; они индексируются непрерывным параметром.

Асимптотика решения краевой задачи для уравнения Лапласа в области с двумя малыми отверстиями

Постникова Е.Ю.

Челябинский государственный универсистет (Челябинск, Россия)

Построено асимптотическое разложение решения краевой задачи для уравнения Лапласа в области с двумя малыми отверстиями. На границе малых отверстий заданы третьи краевые условия. Найдено полное асимптотическое разложение методом согласования. Физической интерпретацией решения является распределения потенциала и плотности тока электрического поля в системе трубопровода протяженным анодом, проложенным в грунте параллельно трубе.

Оператор Максвелла в волноводе с периодическими коэффициентами

Прохоров А.О.

Санкт-Петербургский государственный университет (Санкт-Петербург, Россия)

Рассматривается периодический оператор Максвелла в волноводе с граничными условиями идеальной проводимости. Изучается абсолютная непрерывность его спектра. Для некоторого класса областей данный вопрос сведен к аналогичному вопросу про матричный несамосопряженный оператор Шредингера с краевым условием третьего типа. В итоге абсолютная непрерывность спектра показана в случае цилиндров с круглым и прямоугольным сечениями.

О скорости сходимости суммы квадратов сингулярных чисел интегрального оператора

Радзиевская Е.И.

Национальный университет пищевых технологий (Киев, Украина)

Пусть m - фиксированное натуральное число а C^m m- мерное комплексное арифметическое евклидово пространство, состоящее из вектор-столбцов $f = \{f_1, ..., f_m\}$ с нормой $\|f\|_{C^m} = \left(\sum_{j=1}^m |f_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Рассмотрим в $L_2[0;1;C^m]$, интегральный оператор

$$(Af)(t) := \int_0^1 \int_0^1 \mathcal{A}(t,s) f(s)\, ds,\ f \in \mathrm{L}_2, \qquad (1),$$

где $\mathcal{A}(t,s)$ матрица-функция с измеримыми на квадрате $[0;1]\times[0;1]$ элементами $a_{j,k}(t,s)$ такими, что

$$\|\mathcal{A}\|_{L_2([0,1]\times[0,1];C^{m\times m})} = \int_0^1 \int_0^1 \|\mathcal{A}(t,s)\|^2_{C^{m\times m}}\, dt\, ds < \infty.$$

Равенствами

$$\omega_1(\delta, A) := (\sup_{0\le\ h\le\delta} \left(\int_0^1 \int_0^{1-h} \|\mathcal{A}(t+h,s) - \mathcal{A}(t,s)\|^2\, dt\, ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\omega_2(\delta, A) := (\sup_{0\le\ h\le\delta} \left(\int_0^1 \int_0^{1-h} \|\mathcal{A}(t,s+h) - \mathcal{A}(t,s)\|^2\, dt\, ds\right)^{\frac{1}{2}},$$

задаются модули непрерывности соответственно по первой и второй переменной ядра $\mathcal{A}(t,s)$. Следующий модуль непрерывности ядра $\mathcal{A}(t,s)$ учитывает влияние как первой так и второй переменной

$$\Omega(\delta, \mathcal{A}) = \min(\omega_1(\delta, A), \omega_2(\delta, A))$$

Тогда для сингулярных (s-чисел) чисел оператора A, заданного равенством (1) справедлива оценка

$$\sum_{k=r}^{\infty} s_k^2(A) \le 2\Omega^2\left(\frac{m}{r-m}, \mathcal{A}\right), r = m+1, m+2...$$

Разрешимость краевой задачи для эллиптического уравнения

Репьевский С.В.

Челябинский государственный университет (Челябинск, Россия)

Рассматривается краевая задача для линейного эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области. Коэффициент при искомой функции неположителен всюду в области, кроме малой окрестности внутренней точки. Спрашивается, при каких ограничениях на этот коэффициент в данной малой области остаются справедливыми утверждения о существовании и единственности решения первой краевой задачи.

Фундаментальные системы компактов в пространствах гладких функций

Романенко И.А.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

Дается описание подходящих фундаментальных систем компактов в пространствах гладких функций одной переменной на отрезке. Введено понятие *ω-эллипсоида*, определяемого с помощью модуля непрерывности в $C^n[a;b]$ и рассмотрены основные свойства ω-эллипсоидов. Показано, что компактные ω-эллипсоиды (*ω-компакты*) образуют фундаментальную систему компактов, то есть поглощают все остальные компакты в C^n. Подпространства, порожденные ω-компактами, образуют σ-индуктивную шкалу банаховых пространств с компактными вложениями, индуктивный предел которой совпадает с исходным пространством, а также доказана плотность вложений таких подпространств в исходное пространство и эквивалентность непрерывного и векторного вложений.

О базисных инвариантах группы симметрий $G(m,\, p,\, n)$

Рудницкий О.И.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

В данном сообщении рассматриваются базисные инварианты группы симметрий $G(m,\, p,\, n)$ "дробных" многогранников $\frac{1}{p}\gamma_n^m$, $m \geq 2$.

В n-мерном унитарном пространстве U^n задается система координат с началом O и ортонормированным базисом $\overrightarrow{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, в которой $\overrightarrow{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i$.

Естественным обобщением вещественного n-мерного куба γ_n^2 на пространство U^n является комплексный многогранник γ_n^m, $m \geq 2$, называемый обобщенным n-кубом [1]. Вершины γ_n^m задаются следующими векторами

$$\overrightarrow{OV}_r = \sum_{i=1}^{n} \theta^{k_i} \overrightarrow{e}_i, \tag{1}$$

где θ — первообразный корень степени m из единицы, $k_i = \overline{1,\, m}$, $r = \overline{1,\, m^n}$.

Интерес к изучению геометрии обобщенного n-куба и его группы симметрий $B_n^m = G(m,\, 1,\, n)$ обусловлен его многочисленными применениями, в частности, в теории кодирования [2], а также тем, что на его основе строится серия, так называемых, "дробных"многогранников $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ с импримитивной группой симметрий $G(m,\, p,\, n)$, где p — делитель m $(m = pq)$ [1].

Вершины многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ задаются qm^{n-1} векторами (1) при условии $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i \equiv 0(mod\, p)$ и $r = \overline{1,\, qm^{n-1}}$. Его группа симметрий $G(m,\, p,\, n)$ порождена отражениями порядков q и 2 относительно гиперплоскостей, уравнения которых $x_i = 0$ и $x_i - \theta^k x_j = 0$ соответственно, $i, j = \overline{1,\, n}, i < j$, $k = \overline{1, m}$. Степени базисных инвариантов $m_i = m,\, 2m,\, \ldots, (n-1)m,\, qn$ [3].

Инвариантами группы $G(m,\, p,\, n)$ являются многочлены $V_{m_i} = \sum\limits_{r=1}^{qm^{n-1}} (\overrightarrow{x},\, \overrightarrow{OV_r})^{m_i}$ степени m_i.

Естественно возникает задача, известная как "проблема вершин"для многогранника $\frac{1}{p}\gamma_n^m$ [4]: **являются ли многочлены V_{m_i} базисными инвариантами группы $G(m,\, p,\, n)$?**

Известно решение данной задачи при $m = 2$, $p = 1$ [5, 6] и при $m > 2$, $p = 1$ [7]. В данном сообщении, используя результаты [7], устанавливается алгебраическая независимость многочленов V_{m_i} при $m > 2$ и произвольном p.

Доказано, что **многочлены V_{m_i} степеней $m_i = mt,\ t = \overline{1,\, n-1}$ — базисные инварианты группы $G(m,\, p,\, n)$ при $q > n - 1$.**

Литература

1. Coxeter H.S.M. Regular complex polytopes. London, 1974. 185 p.

2. Конвей Дж., Слоэн Н. Упаковки шаров, решетки и группы. В 2-х т. М.: "Мир 1990, Том1. 415 с.

3. Cohen A.M. Finite complex reflection groups // Ann. scient. Ec. Norm. Sup. - 1976. - 4. - P. 379-436

4. Игнатенко В.Ф. некоторые вопросы геометрической теории инвариантов групп, порожденных ортогональными и косыми отражениями // Проблемы геометрии/ Итоги науки и техники. - М.: Наука, 1984. – Т. 16. – С. 195-229

5. Haeuslein G.K. On the algebraic independence symmetric functions // Proc. Amer. Math. Soc. - 1970. - Vol.25, № 1. - P. 179-182

6. Игнатенко В.Ф. Об одной системе базисных инвариантов группы // Укр. геом. сб. 1986. - Вып.29 - С. 54-55

7. Рудницкий О.И. Об инвариантах групп симметрий правильных комплексных многогранников // Динамические системы. - К.: Лыбидь, 1993. - Вып 12 - С. 74-79

О некоторых классах операторно-дифференциальных уравнений типа Соболева

Власенко Л.А., Руткас А.Г.

Харьковский национальный университет им. В.Н.Каразина (Харьков, Украина)

Исследуются классы дифференциальных уравнений типа Соболева с неограниченными операторными коэффициентами в банаховых и гильбертовых пространствах.Среди этих классов – уравнения с запаздывающим аргументом, функционально-дифференциальные уравнения, уравнения с импульсной составляющей в виде δ-функции, стохастические уравнения. Получены условия существования и единственности решения соответствующих начальных задач, в некоторых случаях указаны формулы для решений; осуществлен анализ задач оптимизации на решениях уравнений, получены условия непрерывной зависимости решений от начальных данных и правых частей уравнений. Рассматриваются приложения к анализу дифференциальным уравнениям в частных производных, не принадлежащих типу Ковалевской, и к анализу прикладных задач, которые описываются этими уравнениями.

Критерии фредгольмовости некоторых классов линейных операторов

Рыжкова А.А., Тришина И.А.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Получены условия фредгольмовости линейных дифференциальных и разностных операторов. Получены формулы для индекса в терминах (так называемого) узлового оператора. Доказано, что индекс оператора не зависит от выбора функциональных пространств, где действует рассматриваемый дифференциальный оператор. Такое же утверждение получено и для разностных операторов. Основные результаты базируются на статье [1]

Список литературы

[1] Баскаков А.Г. *Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффециентами методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений* // Известия РАН, серия Матем., Т. 73 №2, С. 368

О полноте корневых функций одного класса сильно нерегулярных дифференциальных операторов

Рыхлов В.С.

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

В пространстве суммируемых с квадратом функций на отрезке [0,1] рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор n-го порядка ($n = 2m - 1$), порожденный простейшим дифференциальным выражением n-кратного дифференцирования и двухточечными двучленными краевыми условиями. Аналитически описывается класс таких операторов, которые имеют более сильную нерегулярность, чем была рассмотрена до этого. Формулируются и доказываются достаточное условие полноты системы корневых функций таких операторов в пространстве суммируемых с квадратом функций на основном отрезке.

О различных модификациях размерности Вапника–Червоненкиса

Рютин К.С.

МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Модификации известной комбинаторной конструкции Вапгика–Червоненкиса применялись различными авторами в статистике, learning theory, задачах комбинаторики и теории приближений (ссылки, например в [1],[2],[5]). Автора интересует применение подобных величин для измерения массивности классов действительнозначных функций.

Пусть F – некоторое множество действительнозначных функций на множестве S. Положим $\mathrm{sgn}(v) = 1$ при $v > 0$, и 0 при $v \leq 0$, и для $v = (v_1, \dots v_m) \in \mathbf{R}^m$ положим $\mathrm{sgn}[v] = (\mathrm{sgn}(v_1), \dots \mathrm{sgn}(v_m)) \in \{0; 1\}^m$. Всюду ниже $T = \{\tau_1, \dots, \tau_m\} \subset S, v \in \mathbf{R}^m$, S — метрический компакт, $U_\delta(F, f) = \{g \in F : \|g - f\|_{C(S)} \leq \delta\}$, для $f \in F \subset C(S), \delta > 0$. Пусть

$\nu(F,T,v) = \#\{\operatorname{sgn}[(f(\tau_1)-v_1,\dots f(\tau_m)-v_m)] : f \in F\}$. В теории аппроксимации, математической статистике (теории обучения) (ссылки имеются, например, в [1],[2],[5]) использовались следующие понятия: размерность Вапника-Червоненкиса $\dim_{VC}(F) = \sup\{m : \exists T :\ \nu(F,T,0) = 2^m\}$ и псевдоразмерность $\dim_P F = \sup\{m : \exists T, v :\ \nu(F,T,v) = 2^m\}$.

Известно, что для выпуклых множеств $\dim_P$ совпадает с алгебраической размерностью, кроме того в [2] показано, что для любого локально компактного подмножества $F \subset C(S)$ справедливо неравенство $\dim_P F \geq \dim F$.

Определим "локальную"размерность Вапника–Червоненкиса семейства функций в точке $\dim_{vc}(F,f) = \sup\{m : \exists T : \lim_{\delta\to+0} \nu(U_\delta(F,f),T,f(T)) = 2^m\}$ (где $f(T) = (f(\tau_j)) \in \mathbf{R}^m$) и $\dim_{vc} F = \sup_{f\in F} \dim_{vc}(F,f)$. Для ряда важных в приложениях классов функций удаётся вычислить $\dim_{vc}$ (всюду предполагается, что S – невырожденный отрезок на $\mathbf{R}$), но точные значения $\dim_{VC}, \dim_P$ не найдены (см, например [4]): для класса экспоненциальных сумм $E_n = \{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j e^{\alpha_j t} : a_j, \alpha_j \in \mathbf{R}\}$, для малочленов $FP_n = \{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j t^{n_j} : a_j \in \mathbf{R}, n_j \in \mathbf{Z}_+\}$, для множества алгебраических рациональных функций $R_n = \{r(t) = p(t)/q(t) : p, q \in P_n, r \in C(S)\}$. Для множества билинейных форм $B(V,W) = \{v \cdot w : v \in V, w \in W\}$, ($V, W$ — подпространства,) получена оценка $\dim_{vc} B(V,W)$. Вычислена также $\dim_{vc}$ для множеств нейронных сетей и сплайнов с нефиксированными узлами (определения в [3],[5]).

Введение характеристики $\dim_{vc}$ связано также с изучением задачи о том, какие топологические характеристики определяют размерность Вапника–Червоненкиса. Автором установлено, что: если Q вложимо в n–мерный компактный полиэдр, то Q может быть реализовано с $\dim_{vc} \leq n$. Исследуется связь с размерностями Assouad–Nagata.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-00329) и НШ-6003.2012.1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. Assouad.*// Ann. Inst. Fourier, 1983, V. 33, N. 3.
2. *К.С. Рютин.*// Матем. заметки, 2001, т. 70, вып. 1.
3. *A. Andrianov.*// East Journal on approx., 1999, V. 5, N. 4.
4. *M. Karpinski, T. Werther.*// SIAM J. Comp., 1993, V. 22, N. 6.
5. *M. Schmitt.*//Lect. Notes in Artificial Intelligence, V. 2533, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Качественные свойства экстремальных функций линейных функционалов над пространствами Бергмана и Харди

Рябых В.Г., Рябых Г.Ю.

ЮФУ, ДГТУ (Ростов-на-Дону, Россия)

1. Если $\omega \in H_q$ (пространство Харди), то экстремальная функция функционала $l_\omega \in H'^*_p$ принадлежит H_p, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$.

2. Если ω - ограниченная аналитическая функция в D_R, $R > 1$, а f - экстремальная функция функционала $l_\omega \in H^*_p$, $1 \leq p \leq 2$, то f аналитична в D_R, причем, все ее нули лежат в круге D.

3. Если ω - ограниченная аналитическая функция в D_R, $R > 1$, а f - экстремальная функция функционала $l_\omega \in H'^*_p$, $1 \le p \le 2$ (H'_p – пространство Бергмана), то f аналитична в D_R и имеет конечное число нулей в D.

Спектральные свойства дискретного оператора Лапласа на периодическом графе

Сабурова Н.Ю.

Северный (Арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова (Архангельск, Россия)

В работе изучаются спектральные свойства дискретного оператора Лапласа на произвольном $\mathbb{Z}^2$-периодическом связном графе. Для некоторых классов периодических графов получена оценка суммарной ширины спектральных зон. Находятся достаточные условия на структуру графа, при которых спектр оператора имеет собственные значения бесконечной кратности. Рассматривается вопрос о возмущении спектра оператора на периодическом графе добавлением ребра к его фундаментальному графу. Работа выполнена совместно с Е.Л.Коротяевым, С.-Петербургский государственный университет и А.В.Бадaниным, Северный (Арктический) федеральный университет.

Ряды Фурье операторов Стокса и ротора в шаре, приложения

Сакс Р.С.

Институт Математики с ВЦ УНЦ РАН (Уфа, Россия)

В работе содержится ответ на вопрос академика РАН О.А. Ладыженской: как вычислить явно собственные вектор функции оператора Стокса в шаре и в других областях простейших форм, 2003 -[2].

В шаре ответ таков: вычисляем собственные вектор функции u^+ и u^- оператора вихря с нулевыми на границе нормальными компонентами, собственные значения которых равны по модулю, но противоположны по знаку, и среди сумм $u^+ + u^-$ выбираем те, которые исчезают на границе, Saks 2007- [5].

В случае **периодических** граничных условий, каждая соленоидальная собственная функция ротора является собственной функцией оператора Стокса, Saks 2004- [6].

Содержание

1. Постановка спектральной задачи для оператора ротор.

2. Сведение задачи в шаре при $\lambda \neq 0$ к задаче Дирихле для скалярного оператора Лапласа с условием $v(0) = 0$ в центре.

3. Решение этой спектральной задачи.

4. Явные формулы для ненулевых собственных значений $\pm\lambda_{n,m}$ и собственных функций $\mathbf{q}^{\pm}_{n,m,k}(\mathbf{x})$ оператора ротор в шаре.

5. Спектральная задача для оператора градиент дивергенции.

6. Спектральная задача Неймана для оператора Лапласа

7. Явные формулы для собственных функций $\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x})$ ротора в шаре, соответствующих собственному значению $\lambda = 0$.

8. Полнота: семейство собственных функций ротора

$$\{\mathbf{q}_{n,m,k}(\mathbf{x}),\, \mathbf{q}^{+}_{n,m,k}(\mathbf{x}),\, \mathbf{q}^{-}_{n,m,k}(\mathbf{x})\} \quad n, m \in \mathbb{N},\ |k| \le n,$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\dot{\mathbf{L}}_2(B)$ вектор-функций $\mathbf{f}$ из $\mathbf{L}_2(B)$ с нулевой нормальной компонентой на границе шара B.

9. Связь между решениями спектральных задач для операторов ротора и Стокса в различных областях.

10. Явный вид собственных функций оператора Стокса в шаре с условием Дирихле на его границе.

11. Приложения.

Список литературы

[1] Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* М.: Наука. 1974. 810 с.

[2] Ладыженская О.А. *О построении базисов в пространствах соленоидальных векторных полей.* Записки Науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 306. С. 71 -85.

[3] Ладыженская О. А.*Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* М.: Наука, 1970. 288с.

[4] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. 512 с.

[5] Сакс Р.С. *Спектральные задачи для операторов ротора и Стокса.* Доклады Акад. Наук. 2007. Т. 416, № 4, С. 446-450.

[6] Сакс Р.С. *Решение спектральной задачи для операторов ротора и Стокса с периодическими краевыми условиями*//Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 36 (Записки научн. Семинаров ПОМИ, т. 318). 2004. С.-П. С. 246-276.//

Асимптотика числа множеств, свободных от нулей, в группе вычетов по простому модулю

Сапоженко А.А.

Факультет ВМК МГУ им. Ломоносова (Москва, Россия)

Обозначим через Z_p группу вычетов по простому модулю p. Множество $A \subseteq Z_p$ называется *свободным от нулей, МСН*, если $\{a+b+c \not\equiv 0 \pmod p\}$ для всех $a, b, c \in A$. Семейство всех МСН в Z_p обозначим через $SZ(p)$. Доказывается следующая

Теорема. Для $\alpha \in \{-1, 1\}$ существует абсолютная константа c_α такая, что для всх достаточно больших простых $p \equiv \alpha \pmod 3$ выполнено

$$|SZ(p)| \sim c_\alpha p 3^{p/3}.$$

Геометрическая теория управления, субриманова геометрия и их приложения (план курса лекций)

Сачков Ю.Л.

Институт программных систем РАН (Переславль-Залесский, Россия)

(1) Введение в геометрическую теорию управления ([1], глава 1; [6, 25])
  (a) гладкие многообразия, обыкновенные дифференциальные уравнения, векторные поля, коммутаторы, алгебра Ли векторных полей
  (b) управляемые системы
  (c) пример: машина Ридса-Шеппа

(2) Управляемость нелинейных систем ([1], главы 5, 8; [6])
  (a) теорема об орбите
  (b) теоремы Фробениуса и Рашевского-Чжоу
  (c) теорема Кренера

(3) Задача оптимального управления ([1], главы 10–13; [4, 6])

   (a) постановка задачи, ее сведение к исследованию множества достижимости расширенной системы
   (b) теорема Филиппова
   (c) элементы симплектической геометрии
   (d) принцип максимума Понтрягина
   (e) примеры задач оптимального управления
(4) Введение в субриманову геометрию ([1], глава 19; [6, 17, 20])
   (a) постановка задачи
   (b) существование субримановых кратчайших
   (c) субриманова геометрия на 3-мерной группе Гейзенберга
(5) Теория управления на группах Ли ([1], главы 18, 19; [2, 6])
   (a) группы Ли, алгебры Ли, инвариантные векторные поля и управляемые системы, их орбиты и множества достижимости
   (b) однородные пространства групп Ли и индуцированные системы
   (c) глобальная управляемость инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах
   (d) гамильтоновы системы на тривиализованном кокасательном расслоении и группах Ли
   (e) инвариантные задачи оптимального управления на группах Ли
(6) Субриманова геометрия на группах движений плоскости и сферы ([7, 8, 9, 16, 5])
   (a) субриманова геометрия на группе SE(2)
   (b) субриманова геометрия на группе SO(3)
(7) Приложения ([18, 19, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 25, 21])
   (a) задача Эйлера об эластиках
   (b) модели сетчатки глаза, первичной зрительной коры головного мозга V1 и антропоморфное восстановление изображений
   (c) качение твердых тел
   (d) движение мобильных роботов с прицепами
   (e) управление квантовыми системами
   (f) алгоритмы и программы

Список литературы

[1] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. —М.: Физматлит, 2005, 391 С. Перевод на англ. яз.: A.A. Agrachev, Yu. L. Sachkov, *Control Theory from the Geometric Viewpoint*, Springer-Verlag, Berlin 2004.
[2] Сачков Ю.Л. Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах. —М.: Физматлит, 2007, 224 С.
[3] Sachkov Yu. L. Control theory on Lie groups. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 156, No. 3, 2009, 381-439
[4] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Наука, 1961.
[5] Уиттекер Ю.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа, М.: УРСС, 2002.
[6] V. Jurdjevic, *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
[7] Yuri L. Sachkov and Igor Moiseev, *Maxwell strata in sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane*, ESAIM: COCV, **16** (2010), 380–399.
[8] Yuri L. Sachkov, *Conjugate and cut time in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane*, ESAIM: COCV, **16** (2010), 1018–1039.
[9] Yuri L. Sachkov, *Cut locus and optimal synthesis in the sub-Riemannian problem on the group of motions of a plane*, ESAIM: COCV, **17** (2011), 293–321.
[10] Yu. L. Sachkov, Maxwell strata in Euler's elastic problem, Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 14 (2008), No. 2 (April), pp. 169–234.

[11] Yu. L. Sachkov, Conjugate points in Euler's elastic problem, *Journal of Dynamical and Control Systems*, vol. 14 (2008), No. 3 (July).

[12] Сачков Ю.Л. Оптимальность эйлеровых эластик //Доклады Академии Наук, том 417, № 1, ноябрь 2007, С. 23–25.

[13] Сачков Ю.Л. Симметрии и страты Максвелла и симметрии в задаче об оптимальном качении сферы по плоскости // Мат. Сборник, 2010, Т. 201, N 7, С. 99–120.

[14] А.А.Ардентов, Ю.Л.Сачков. Решение задачи Эйлера об эластиках. Автоматика и телемеханика, No. 4, 2009, 78 – 88.

[15] Сачков Ю.Л., Левяков С.В. Устойчивость инфлексионных эластик, центрированных в вершинах или точках перегиба // Труды МИАН, 2010, Т. 271, 187 – 203.

[16] U. Boscain, F. Rossi, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, SO(3), SL(2), and lens spaces. *SIAM J. Control Optim.* 47 (2008), no. 4, 1851–1878.

[17] R. Montgomery, A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. AMS, 2002, 259pp.

[18] Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. Приложение I, «Об упругих кривых», ГТТИ, Москва-Ленинград, 1934, 447–572.

[19] Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ, Москва-Ленинград, 1935.

[20] *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Неголономные динамические системы и геометрия распределений //Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. М.: ВИНИТИ.— 1986.— Т. 7.

[21] S. Wolfram, *Mathematica: a system for doing mathematics by computer*, Addison-Wesley, Reading, MA 1991.

[22] J.Petitot, *The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure*, J. Physiology - Paris, **97** (2003), 265–309.

[23] J.Petitot, *Neurogeometrie de la vision — Modeles mathematiques et physiques des architectures fonctionnelles*, (2008), Editions de l'Ecole Polytechnique.

[24] G. Citti, A. Sarti, A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space, *J. Math. Imaging Vis.* 24: 307–326, 2006.

[25] J.P. Laumond, Nonholonomic motion planning for mobile robots, *Lecture notes in Control and Information Sciences, 229.* Springer, 1998.

Вычислительный алгоритм приближенного решения задачи управления

Сачкова Е.Ф.

Институт программных систем РАН (Переславль-Залесский, Россия)

В докладе будет рассмотрена двухточечная граничная задача управления для трехмерных по состоянию нелинейных управляемых систем с двумерным линейным управлением. Будет приведен вычислительный алгоритм, основанный на нильпотентной аппроксимации исходной нелинейной системы. Данный алгоритм является многометодным, и апробирован на задаче управления ориентацией сферы, которая катится без проскальзывания и прокручивания. Будет проведен сравнительный анализ результатов работы алгоритма на различных методах.

Пространство начальных данных 3-й краевевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения

Селицкий А.М.

ВЦ РАН им. А.А. Дородницына (Москва, Россия)

В параболических задачах вопрос силной разрешимости связан с интерполяционным пространством, которое называют пространством начальных данных. В случае 1-й краевой задачи для параболического дифференциально-разностного уравнения А.Л. Скубачевским и Р.В. Шаминым при дополнительных предположениях о разностном операторе и рассматриваемой области было даказано, что пространство начальных данных совпадает с пространством Соболева. Позднее Р.В. Шаминым эти ограничения были сняты. В случае краевых условий 2-го и 3-го рода данный вопрос был положительно решен автором в одномерном случае. В настоящем сообщении рассматривается многомерный случай, при дополнительных ограничениях на область и разностный оператор. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№10-01-00837).

О некоторых классах интегродифференциальных уравнений второго порядка, неразрешённых относительно старшей производной

Сёмкина Е.В.

Таврический национальный университет им.В.И.Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматривается задача Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве, где коэффициент при старшей производной — положительный компактный оператор. Для этой задачи получены утверждения о существовании и единственности сильного решения.

Для неполного интегродифференциального уравнения второго порядка рассмотрена также соответствующая спектральная задача. Для спектральной задачи сформулирован ряд утверждений о структуре и асимптотике спектра, а также о свойствах базисности Рисса и кратной полноте части собственных и присоединённых элементов.

Спектральная кратность операторов Шредингера на звездных графах

Симонов С.А.

СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева (Санкт-Петербург, Россия)

Мы рассматриваем оператор Шредингера на звездном графе с n конечными или бесконечными ребрами и стандартным условием сшивания в общей вершине. Нас интересует локальная кратность спектра такого оператора. При этом считаются известными спектральные меры μ_l, $l = 1, ..., n$, операторов Шредингера на каждом из ребер (с граничным условием Дирихле). При $n = 2$ такая ситуация описывается теоремой Каца. В частности, данная теорема утверждает, что сингулярный спектр оператора на всем графе (в этом случае - оператор Шредингера на всей оси) всегда является простым. Наш результат является обобщением теоремы Каца на случай $n \geq 2$. Ответ (локальная кратность спектра) зависит от типа спектра, а именно от свойств абсолютной непрерывности или сингулярности спектральной меры относительно меры Лебега и меры $\mu := \sum_{l=1}^{n} \mu_l$. В частности, кратность сингулярного спектра не превосходит $n-1$, но может быть и меньше. По совместной работе с Харальдом Ворачеком (TU Wien).

К проблеме винтового движения идельной сжимаемой жидкости в трубе

Аширов А., Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З.

Туркменский государственный университет (Ашхабад, Туркменистан), Таврический национальный университет, Крымский инженерно–педагогический университет (Симферополь, Украина)

В работе изучается линейная задача о движении идеальной сжимаемой жидкости, близком к винтовому движению в бесконечной трубе. В системе координат $Ox_1x_2x_3$, равномерно вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{e}_3$, движение жидкости близко к равномерному перемещению с постоянной скоростью $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_3$ вдоль оси трубы. Для описания малых отклонений от такого винтового движения возникает следующая начально–краевая задача ([1], с. 402)

$$\partial\vec{u}/\partial t + v_0\,(\partial\vec{u}/\partial x_3) + \nabla p + 2\omega_0\,\vec{u}\times\vec{e}_3 = \vec{0}, \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}, \tag{1}$$

$$\partial p/\partial t + v_0\,(\partial p/\partial x_3) + \beta^2\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0, \quad p(0,x) = p^0(x), \quad x \in \widetilde{\Omega}, \tag{2}$$

$$u_n = 0, \quad x \in S, \tag{3}$$

где $\vec{u}(t,x)$ и $p(t,x)$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \widetilde{\Omega} := \Gamma\times(-\infty,\infty)$, — скорость частиц и давление в жидкости, $\beta^2 > 0$ и $v_0 > 0$ — коэффициент сжимаемости и скорость поступательного движения жидкости, Γ и S — поперечное сечение и боковая поверхность трубы.

Как и в [2, 3], решение задачи (1)–(3) можно разыскивать через функцию состояния $\Phi = \Phi(t,x)$,

$$\vec{u} = \nabla(D^2\Phi/Dt^2) + 2\omega_0[\nabla(D\Phi/Dt)\times\vec{e}_3] + 4\omega_0^2(\nabla\Phi\cdot\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_3,$$
$$p = -(D^3\Phi/Dt^3) - 4\omega_0(D\Phi/Dt), \quad D/Dt := (\partial/\partial t) + \alpha(\partial/\partial x_3).$$

При этом Φ удовлетворяет эволюционному уравнению

$$(D^4\Phi/Dt^4) + 4\omega_0^2(D^2\Phi/Dt^2) - \beta^2\Delta(D^2\Phi/Dt^2) - 4\omega_0^2\beta^2(\partial^2\Phi/\partial x_3^2) = 0$$

и соответствующему условию непротекания на боковой поверхности. В случае кругового цилиндра, переходя к безразмерным координатам, и полагая $\Phi = \exp(i(\omega t + \gamma x_3))\Phi(r,\theta)$, приходим для $\Phi(r,\theta)$ к спектральной задаче

$$\Delta_2\Phi + (\lambda^4 - \lambda^2(4\omega_0^2 + \beta^2\gamma^2) + 4\omega_0^2\beta^2\gamma^2/\beta^2\lambda^2)\Phi = 0, \quad \lambda = \omega + \alpha\gamma, \quad (r,\theta)\in\Gamma,$$
$$-\lambda\Big(\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial r} + 2i\omega_0\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\Big)\Big|_{r=1} = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Эта задача допускает разделение переменных в форме $\Phi(r,\theta) = \varphi(r)\psi(\theta)$ (в полярной системе координат). При этом возникает спектральная проблема для радиальных амплитудных функций $\varphi(r)$,

$$r^2\varphi'' + r\varphi' + [r^2(\lambda^2/\beta^2 - \gamma^2)(1 - 4\omega_0^2/\lambda^2) - m^2]\varphi = 0, \quad \lambda\varphi'(1) + 2m\omega_0\varphi(1) = 0, \tag{4}$$

а также характеристическое уравнение для собственных значений

$$(\lambda^2/\beta^2 - \gamma^2)(1 - 4\omega_0^2/\lambda^2) =: \xi_{mk}^2, \ \lambda J_m'(\xi_{mk}) + 2m\omega_0 J_m(\xi_{mk}) = 0, \ m \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \ k \in \mathbb{N}.$$

где $J_m(r)$ — функция Бесселя m-го порядка.

Разработаны алгоритмы численного решения задачи (4), для которого справедливы оценки:

$$\begin{cases} \lambda^2 < 4\omega_0^2, \quad \lambda^2 > \beta^2\gamma^2, & \text{при} \quad \beta^2\gamma^2 > 4\omega_0^2; \\ \lambda^2 < \beta^2\gamma^2, \quad \lambda^2 > 4\omega_0^2, & \text{при} \quad \beta^2\gamma^2 < 4\omega_0^2. \end{cases}$$

Рассматривается также задача (1)–(3) для участка трубы, отвечающего одному шагу l винтового движения жидкости, $l = 2\pi/v_0$. Для области $\Omega = \Gamma \times (0, l)$ справедлив закон сохранения полной энергии в форме

$$\frac{1}{2}\Big\{ \int_\Omega |\vec{u}|^2 d\Omega + \beta^{-2} \int_\Omega |p|^2 d\Omega \Big\} = \text{const}.$$

Далее вводится пространство $\mathcal{H} := \vec{L}_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$ вектор-функций $y(x) := (\vec{u}, p)^\tau$, допускающих периодическое продолжение вдоль трубы с периодом l. Выясняется, что проблему (1)–(3) можно трактовать как задачу Коши в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\partial y/\partial t + \widetilde{\mathcal{A}} y + 2\omega_0 \widetilde{\mathcal{B}} y = 0, \quad y(0) = y^0 = (\vec{u}^0(x), p^0(x))^\tau, \tag{5}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} \alpha\,(\partial/\partial x_3) & \nabla \\ \mathrm{div} & \alpha\beta^{-2}(\partial/\partial x_3) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{11}\vec{u} = \vec{u} \times \vec{e}_3, \tag{6}$$

где $\widetilde{\mathcal{A}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — неограниченный кососопряженный оператор, $\widetilde{\mathcal{B}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — ограниченный оператор.

С помощью замен $\widetilde{\mathcal{A}} \mapsto i\mathcal{A}$, $\widetilde{\mathcal{B}} \mapsto i\mathcal{B}$, $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{A} + 2\omega_0 \mathcal{B}$ вместо (5)–(6) получаем абстрактную задачу Коши

$$dy/dt + i\mathcal{C}y = 0, \quad y(0) = y^0 = (\vec{u}^0(x), p^0(x))^\tau, \tag{7}$$

причем оператор $\mathcal{C} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ — самосопряженный.

Определение 1. *Функция $y(t)$ со значениями в $\mathcal{H}$ называется сильным решением задачи (7), если:*

1°. $\vec{u}(t, x) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega))$, $p(t, x) \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$;

2°. $\partial\vec{u}(t, x)/\partial x_3 \in C([0, T]; \vec{L}_2(\Omega))$, $\nabla p \in C([0, T]; \vec{L}_2(\Omega))$;

3°. $div\,\vec{u} \in C([0, T]; L_2(\Omega))$, $\partial p(t, x)/\partial x_3 \in C([0, T]; L_2(\Omega))$;

4°. выполняются уравнение и начальные условия.

Теорема 1. *Если $y^0 \in \mathcal{D}(C)$, то для $\forall v_0 > 0$, $\forall \beta > 0$, $\forall t \in [0, T]$, задача (7) имеет единственное сильное решение $y(x) \in \mathcal{H}$, которое представляется в виде $y(t) = \exp(-it\mathcal{C})y^0$.*

Установлены также свойства решений спектральной задачи

$$\mathcal{C}y = \omega y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H},$$

отвечающей задаче Коши (7), в частности, дискретности спектра, полнота и базисность системы собственных элементов.

Отметим, что исследуемая задача может быть сформулирована в иной постановке, если воспользоваться неинерциальной системой координат, совершающей винтовые движения с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{e}_3$ и перемещающимся полюсом (началом координат) со скоростью $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_3$. Можно показать, что тогда вместо (1)–(3) возникает начально–краевая задача такого же вида, в которой формально $v_0 = 0$. Для этой задачи справедливы те же утверждения (с соответствующими упрощениями), которые были сформулированы выше.

Литература

1. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: МИР, 1977. — 622 с.

2. Соболев С.Л. Об одной новой задаче математической физики // Известия АН СССР. Матем. — 1954. — Т. 18, N 1. — С. 3–50.

3. Копачевский Н.Д., Ситшаева З.З. Применение функции состояния в задаче о малых колебаниях вращающейся гидросистемы "жидкость-газ"// Тезисы докл. XXII междунар. научн. конференции KROMSH-2011. — Симферополь: изд-во КНЦ НАНУ, 2011. — С. 29–30.

Дискретный спектр периодического оператора Шредингера с переменной метрикой при неотрицательном возмущении

Слоущ В.А.

СПбГУ (Санкт-Петербург, Россия)

Пусть A — эллиптический периодический самосопряженный оператор второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 1$, и пусть V — оператор умножения на функцию $V(x) \geq 0$, стремящуюся (в подходящем смысле) к нулю при $|x| \to +\infty$. Пусть (α, β) — *внутренняя* лакуна в спектре A и $\lambda \in [\alpha, \beta]$ — фиксированное число. Спектр оператора $B(t) := A + tV$, $t > 0$, в лакуне (α, β) дискретен. Через $N(\lambda, \tau)$ обозначается число собственных значений оператора $B(t)$, прошедших через точку λ при увеличении t от 0 до τ. В работе была получена асимптотика $N(\lambda, \tau)$ при $\tau \to +\infty$, в случае, когда возмущение $V(x)$ имеет степенную асимптотику на бесконечности $V(x) \sim \omega(x/|x|)|x|^{-\rho}$, $|x| \to +\infty$, $\rho > 0$.

Основной результат имеет вид $N(\lambda, \tau) \sim \Gamma_\rho(\lambda)\tau^{d/\rho}$, $\tau \to +\infty$. При этом коэффициент $\Gamma_\rho(\lambda)$ вычисляеься в терминах *зонных функций* оператора A. При определенных условиях указанная асимптотика справедлива и на левом краю лакуны при $\lambda = \alpha$. Каких-либо дополнительных требований на гладкость коэффициентов оператора A не накладывается. Ранее описанный результат был получен при дополнительном условии $\rho < d$. В настоящий момент все условия сняты, асимптотика функции $N(\lambda, \tau)$ при $\tau \to +\infty$ получена при любом $\rho > 0$.

Проверка основного результата сводится к анализу асимптотики сингулярных чисел некоторых интегральных операторов. При этом существенно используются различные обобщения оценки Цвикеля. Найденная асимптотика нелокальна по энергиям, ее порядок отличается от "стандартного" $\tau^{d/2}$. Вейлевский характер асимптотики проявляется после замены ролей координат и квазиимпульсов.

Вариационные задачи с подвижной границей в пространствах Соболева

Смирнова С.И.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Рассматриваются задачи на условный экстремум основного вариационного функционала с подвижной границей, в которой условие связи задается с помощью второго вариационного функционала с подвижной границей. При этом оба функционала содержат подвижную границу и под знаком интегранта.

Такой подход объединяет в себе как вариационные задачи изопериметрического типа, так и задачи на поиск условия трансверсальности. Впервые такой подход был применен С.Ю. Артамоновым в случае пространства C^1. В настоящем докладе рассмотрено обобщение этого подхода на случай пространств Соболева $W^{1,p}$.

Специфика ситуации приводит к переходу от понятия условного локального экстремума к понятию условного компактного экстремума. Понятие компактного экстремума было введено в работах И.В. Орлова и оказалось удобным инструментом при исследовании экстремальных вариационных задач в пространствах Соболева. Мы обобщаем это понятие на случай условного экстремума.

Применение соответственно модифицированного метода множителей Лагранжа приводит к системе, состоящей из двух необходимых условий: так называемое совместное уравнение Эйлера–Лагранжа (для пары рассматриваемых интегрантов) и так называемое обобщенное условие трансверсальности. Оба условия, в отличие от гладкого случая, появляются в “почти всюду”–форме.

Задачи магнитной гидродинамики со свободными границами в многосвязных областях

Солонников В.А.

Математический Институт им. В.А. Стеклова в Санкт-Петербурге (Санкт-Петербург, Россия)

В докладе проводится постановка задач со свободными границами для уравнений магнитной гидродинамики и доказывается их однозначная локальная разрешимость в анизотропных пространствах Соболева.

О разрешимости задачи Дирихле для существенно нелинейного эллиптического дифференциально–разностного уравнения

Солонуха О.В.

Центральный экономико–математический институт РАН (Москва, Россия)

Рассмотрим функционально–дифференциальное уравнение с p-лапласианом, возмущенным разностным оператором,

$$\Delta_p R_Q u(x) = f_0(x) \quad (x \in Q)$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \qquad (x \in \partial Q).$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞, $2 < p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f_0 \in L_q(Q)$, а Δ_p — p–лапласиан, задаваемый формулой

$$\Delta_p u(x) = -\sum_{1 \le i \le n} \partial_i \left(|\partial_i u|^{p-2} \partial_i u \right).$$

Оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ задан по формуле $R_Q = P_Q R I_Q$. Здесь $R : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$, $2 < p < \infty$, разностный оператор вида

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h),$$

$a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов с целочисленными координатами, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $I_Q : L_p(Q) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_p(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(Q)$ — оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ на Q.

Получены достаточные условия существования обобщенного решения данной задачи в соболевском пространстве $\mathring{W}_p^1(Q)$, а также построены примеры, когда в отличие от линейного случая $p = 2$ возмущенный оператор не является монотонным, то есть не гарантирована единственность обобщенного решения.

Работа поддержана РФФИ (грант № 10-01-00395).

Задача Коши для простейшего эволюционного нерегулярного уравнения

Статкевич В.М.

Национальный технический университет Украины
"Киевский политехнический институт" (Киев, Украина)

В бесконечномерном сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве рассматривается задача Коши для простейшего эволюционного уравнения с нерегулярным эллиптическим оператором, зависящим от времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = j(t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) = (Lu)(x,t),$$
$$u(x,0) = \varphi(x).$$

Здесь $j(t)$ при каждом $t \in [0;T]$ является неотрицательным линейным функционалом на пространстве самосопряжённых ограниченных линейных операторов. Операторы вида L предложены Ю.В. Богданским [1], одним из частных случаев такого оператора является классический оператор Лапласа-Леви. В докладе будет приведена явная формула решения рассматриваемой задачи, полученная в совместной работе [2].

1. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журнал. – 1977. – **29**, №6. – С. 781–784.

2. *Богданский Ю.В., Статкевич В.М.* Задача Коши для простейшего эволюционного нерегулярного уравнения // Spectral and Evolution Problems. – 2012. – Vol. 22. – pp. 23–27.

Об одном субградиентном методе с преобразованием пространства

Стецюк П.И., Кошлай Л.Б.

Институт кибернетики им. В.М. Глушкова НАНУ (Киев, Украина)

Рассматривается субградиентный метод с преобразованием пространства переменных для нахождения точки минимума выпуклой функции при ее известном минимальном значении. В методе используется шаг Поляка в направлении нормированного антисубградиента в преобразованном пространстве; длина шага вычисляется с использованием минимального значения функции. Преобразование пространства направлено на уменьшение степени овражности поверхностей уровня выпуклых функций и применяется только в том случае, когда угол между двумя последовательными субградиентами тупой. В докладе обсуждаются основные свойства метода: (a) уменьшение расстояния до точки минимума в преобразованном пространстве переменных; (b) локализация точки минимума в эллипсоиде, объем которого монотонно убывает. Для неовражных функций, если преобразование пространства не реализуются ни на одной итерации, то метод совпадает с предложенным Б.Т.Поляком субградиентным методом [1].

Для овражных выпуклых функций метод обладает ускоренной сходимостью по отношению к субградиентному методу Поляка.

[1] Поляк Б.Т. Минимизация негладких функционалов // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1969. – Т.9, № 3. – С. 507-521.

Решение задачи о разделе сокровищ двумя разбойниками на базе одного обобщения понятия меры множества

Стонякин Ф.С., Магера Н.В.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

Хорошо известны многочисленные работы, посвящённые задаче о справедливом разделе предметов несколькими лицами. Эта задача изучалась, начиная с 40-х годов XX века в работах Ляпунова и Штейнгауза. Данная проблематика привлекала и привлекает интерес многих математиков и ей, в частности, посвящены и многие современные работы. При этом, как правило, рассматривается задача о разделе предметов между участниками, использующими для их оценки меры.

Мы вводим новое обобщение понятия меры множества — понятие α-квазимеры и на его базе предлагаем решение задачи о разделе сокровищ между двумя разбойниками, использующими α-квазимеры для оценки частей этих сокровищ. Получены аналоги основных свойств меры для α-квазимер. Показана, вообще говоря, невозможность раздела сокровищ между двумя разбойниками, если они используют α-квазимеры для их оценки. Введены дополнительные характеристики α-квазимер (скачок, χ_ρ-делимость и χ_ρ-непрерывность) и на их базе получены достаточные условия возможности раздела сокровищ двумя разбойниками, если первый из них использует для оценки их частей меру, а второй — α-квазимеру.

Структура оператора, обратного к интегральному оператору специального вида

Струков В.Е.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

В работе рассматривается алгебра с единицей, порожденная интегральными операторами, действующими в пространствах непрерывных периодических функций. Доказывается наполненность этой подалгебры в алгебре всех ограниченных операторов.

Теорема Винера для периодических на бесконечности функций с рядами Фурье, суммируемыми с весом

Струкова И.И.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Определяется банахова алгебра периодических на бесконечности функций. Для таких функций вводится понятие ряда Фурье и его абсолютной сходимости, а также понятие обратимости. Получен аналог теоремы Винера об абсолютно сходящихся рядах Фурье для периодических на бесконечности функций, коэффициенты Фурье которых суммируемы с весом.

Математическое ожидание решения уравнения диффузии с зависимыми случайными коэффициентами

Сумера С.С.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Рассматривается начальная задача для линейного дифференциального уравнения второго порядка со случайными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \varepsilon_1(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_3^2} + \varepsilon_2(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_1} + \varepsilon_3(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_2} +$$

$$+\varepsilon_4(t)u(t,x) + f(t,x), \qquad (1)$$

$$u(t_0,x) = u_0(x). \qquad (2)$$

Здесь $t \in T = [t_0,t_1] \subset \mathbb{R}$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, u – искомая функция, $\varepsilon_j(t) > 0$, $j = \overline{1,4}$, f – случайные процессы, u_0 – случайное поле, независимое с ε_j и f, предполагается, что ε_j и f заданы характеристическим функционалом. Рассмотрен случай, когда ε_1 и ε_3 нормально распределенные зависимые случайные процессы, ε_1 и ε_4 независимые с ними равномерно распределенные случайные процессы.

Получена формула для вычисления математического ожидания решения задачи (1), (2).

Теория уравнений с частными производными — взгляд со стороны

Тихомиров В.М.

Московский Государственный Университет (Москва, Россия)

В докладе будет рассказано о том, что на моих глазах рождалось, обсуждалось, осмысливалось и создавалось в теории уравнений с частными производными в 50-е-70-е годы. Будут затронуты идеи, методы и результаты Адамара, Бернштейна, Вишика, Волевича, Гельфанда, Лере, Никольского, Петровского, Соболева, Тихонова, Хермандера, Шаудера, Шварца, Шилова и др. Попутно речь пойдет о кафедре Петровского и семинаре Гельфанда.

Дробно-линейные преобразования и решение кубических уравнений

Тихонов А.С.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

На базе свойств дробно-линейных преобразований комплексной плоскости представлена геометрическая интерпретация формул Кардано и дан способ решения кубических уравнений, основанный на этом подходе. Центральным объектом являются вводимые в работе "точки разрешимости"(неподвижные точки дробно-линейных преобразований циклически переставляющих корни кубического уравнения). Дана геометрическая характеризация этих точек.

Работа доступна студентам младших курсов и может быть эффективно (и эффектно) использована в университетском курсе комплексного анализа. С деталями можно ознакомиться в Вязовецкий Ю.В., Тихонов А.С. "Окружность, описанная вокруг многочлена Математическое просвещение, сер. 3, вып. 15, 2011(107–113), М., МЦНМО, 2011 (интернет-версия доступна по адресу http://www.mccme.ru/free-books/matprosg.html)

Асимптотики решений задачи Коши для волнового уравнения с вырождением на границе

Умаров Х.Г.

Чеченский государственный университет (Грозный, Россия)

Модель двойной пористости фильтрации жидкости в трещиновато-пористой породе реализуется системой дифференциальных уравнений в частных производных относительно искомых давлений в трещинах p_1 и в порах блоков p_2 соответственно. Исключая из этой системы одно из давлений, в случае изотропного пласта получают уравнение Баренблатта–Желтова–Кочиной (БЖК)

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} - \omega \frac{\partial \triangle p_1}{\partial t} = \chi \triangle p_1,$$

в котором ω, χ – положительные постоянные, а $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ – дифференциальный оператор Лапласа в R^3.

В банаховом пространстве $L_p(R^3)$, $1 \le p < +\infty$, оператор Лапласа $\triangle$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t;\triangle)$ класса C_0. Используя свойства оператора $\triangle$ и его резольвенты, уравнение можно переписать в пространстве $L_p(R^3)$ в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с ограниченным операторным коэффициентом A. Так как задача Коши для абстрактного уравнения с ограниченным операторным коэффициентом разрешима и удается найти представление для полугруппы, порождаемой оператором A, через полугруппу $U(t;\triangle)$, то получаем явный вид решения задачи Коши для уравнения БЖК и оценку его нормы в $L_p(R^3)$. Оказывается, что полученное решение непрерывно зависит от начального данного и, если начальное данное из области определения оператора Лапласа, то у функции $p_1(x,y,z,t)$ по переменным $(x,y,z) \in R^3$ при $t \ge 0$ существуют все частные и смешанные обобщенные производные в $L_p(R^3)$ до второго порядка включительно, причем по временной переменной t это решение бесконечно дифференцируемо. Из формулы следует, в силу ограниченности оператора A, и значит, того что $U(t;A) = \exp(tA)$ – группа, возможность «восстановления прошлого» в изотропном случае, а именно, возможность по начальному данному определения давления $p_1(x,y,z,-t)$ в момент «отрицательного» времени $-t$.

К теории сингулярных уравнений с ядром Коши в исключительном случае с произвольнами порядками нулей

Урбанович Т.М.

Полоцкий государственный университет (Полоцк, Беларусь)

Рассматривается характеристическое сингулярное интегральное уравнение на прямой

$$a\varphi + bS\varphi = f$$

с оператором Коши

$$(S\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)dt}{t-t_0}, \quad t_0 \in \mathbb{R},$$

где коэффициенты a, b и правая часть f принадлежат классу Гельдера на расширенной прямой $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{\infty\}$, причем $f(\infty) = 0$. Найдены условия разрешимости и явная формула решения этого уравнения в предположении, что функции $(a \pm b)(t)$ допускают на контуре $\mathbb{R}$ конечное число нулей произвольных неотрицательных порядков.

Убывание при больших временах решений уравнений типа Кортевега-де Фриза

Фаминский А.В.

Российский университет дружбы народов (Москва, Россия)

Изучаются вопросы убывания при $t \to +\infty$ в нормах пространства L_2 решений обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза $u_t + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0$. Рассматриваются задача Коши, смешанные задачи на полуоси и на ограниченном интервале. Формулируются достаточные условия на функцию $a(x)$, приводящие к такому убыванию. Результаты обобщаются на случай двумерного аналога рассматриваемого уравнения.

Об устойчивом решении уравнений в пространствах с абстрактной нормой

Фетисов Ю.М.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

В настоящее время активно развивается концепция приближенного решения некорректной задачи на основе построения подходящего регуляризирующего алгоритма для нее.

Конкретные регуляризирующие алгоритмы неоднократно демонстрировали свою эффективность при численном решении важных прикладных задач. В связи этим представляется несомненно актуальным и их теоретическое исследование. Рассматривается алгоритм "упрощенной"регуляризации для случая пространств с абстрактной нормой и на его основе строятся регуляризованные решения.

Приведены примеры некорректно поставленных задач в решеточно-нормированных пространствах. В частном случае, когда в качестве нормирующей векторной решетки выступает K-пространство вещественных чисел, получен ряд известных результатов.

Управление движением системы тел по плоскости с сухим трением

Фигурина Т.Ю.

Институт проблем механики РАН им. Ишлинского (Москва, Россия)

Решена задача перемещения вдоль прямой на заданное расстояние за минимальное время N идентичных тел при отсутствии ограничений на силу взаимодействия между телами и ограничении на расстояния между ними. Рассмотрены также медленные (квазистатические) движения трех тел по плоскости с сухим трением, управляемые изменением расстояний между телами.

Нормальные параболические уравнения, соответствующие 3-х мерной системе Гельмгольца

Фурсиков А.В.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

Полулинейное параболическое уравнение относительно векторного поля v называется нормальным параболическим уравнением (НПУ), если его нелинейный член $B(v)$ коллинеарен вектору v при каждом v. Так как энергетическое неравнество (ЭН) следует из условия $B(v) \perp v$, НПУ не удовлетворяет ЭН в наибольшей степени.

Для трехмерного уравнения Гельмгольца, описывающего вихрь поля скорости вязкой несжимаемой жидкости, мы выводим соответвтвующее ему НПУ, чей нелинейный член $B(v)$ является ортогональной проекцией нелинейного члена уравнений Гельмгольца на луч, порожденный v. Оказывается, что существует явная формула для решений этого НПУ, позволяющая описать его динамическую структуру, т.е. разбить его фазовое пространство на множество взрывов (множество начальных условий, для которых решение взрывается за конечное время), множество устойчивости (когда решение экспоненциально убывает с заданной скоростью, если время $t \to \infty$) и промежуточное множество, а также дать аналитическое описание этих множеств.

Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам

Халилова З.И.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Вариационные задачи с негладким интегрантом составляют важную часть вариационного исчисления. Недавно в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина была развита теория компактных субдифференциалов (К-субдифференциалов) отображений скалярного аргумента, которая затем в работах З. И. Халиловой и И. В. Орлова была перенесена на случай отображений векторного аргумента. Такой переход к бесконечномерной области определения позволяет исследовать, в частности, вариационные задачи с К-субдифференцируемым интегрантом.

В настоящем докладе рассмотрено применение аппарата К-субдифференциального исчисления, в результате получен общий вид К-субдифференциала вариационного функционала с произвольным К-субдифференцируемым интегрантом. Здесь получена оценка не только общего вида, но работа доведена до конкретных оценок в ряде практически важных случаев.

На этой базе получен выпуклый аналог основной леммы вариационного исчисления и выпуклый аналог классического вариационного уравнения Эйлера - Лагранжа.

Полученные результаты позволили изучить вопрос о вычислении субэкстремалей вариационного функционала для случая, когда интегрант является модулем гладкой функции. Также рассматривается конкретный пример - обобщенный гармонический осциллятор с негладким интегрантом ("субгармонический осциллятор").

Теорема равносходимости для интегрального оператора с негладкой инволюцией

Халова В.А.

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского (Саратов, Россия)

Пусть A — оператор вида

$$Af = \int\limits_0^{\vartheta(x)} A(\vartheta(x), t) f(t)\, dt,$$

где ядро $A(x,t)$ непрерывно по x и t вместе с производными A_x, A_t, A_{xt}, A_{x^2t}, A_{xt^2} $\left(A_{x^s t^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)\right)$ при $0 \le t \le x$ и $A(x,x) \equiv 1$, $\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{\gamma-1}{\gamma}x + 1, & x \in [0,\gamma], \\ \frac{\gamma}{\gamma-1}(x-1), & x \in [\gamma, 1], \end{cases}$ $\gamma < 1/2$.

Функция $\vartheta(x)$ непрерывна, монотонно убывает, $\vartheta(0) = 1$, $\vartheta(1) = 0$, $\vartheta^2(x) = \vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$. Таким образом, $\vartheta(x)$ — инволюция, производная которой имеет разрыв в точке $x = \gamma$, что создает дополнительные трудности в получении теоремы равносходимости. В этом случае равносходимость будет иметь место лишь при $[\varepsilon, \gamma - \varepsilon]$ и $[\gamma + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$.

Теорема. *Для любой $f(x) \in L[0,1]$ имеют место соотношения*

$$S_r(f,x) = \begin{cases} \sigma_{r/|\omega|}\left(g_1, \frac{x}{2\gamma}\right) + o(1), & x \in [\varepsilon, \gamma - \varepsilon], \\ \sigma_{r/|\omega|}\left(g_2, \frac{1}{2(1-\gamma)}(x + 1 - 2\gamma)\right) + o(1), & x \in [\gamma + \varepsilon, 1 - \varepsilon], \end{cases}$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора A для тех λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$; $\sigma_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x) \in L[0,1/2]$ по собственным функциям оператора y', $y(0) = y(1/2)$; $\omega = \dfrac{1}{2\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}$, $g_1(x) = f(2\gamma x)$, $g_2(x) = f(2(1-\gamma)x + \gamma)$, $o(1) \to 0$ равномерно по x при $[\varepsilon, \gamma - \varepsilon]$, $[\gamma + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$.

Динамические модели организации грузоперевозок

Хачатрян Н.К.

ЦЭМИ РАН (Москва, Россия)

Рассмотрены динамические модели организации грузоперевозок на протяженном участке пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Первая модель описывает транснациональные транспортные грузоперевозки (с большим количеством промежуточных станций) без выделенных начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов. Вторая модель описывает транспортные грузоперевозки с выделенной начальной станцией отправления грузов. Эта модель описывает грузоперевозки на протяженном участке пути, где начальная станция является узловой. Третья модель описывает транспортные грузоперевозки с выделенными начальной станцией отправления и конечной станцией распределения грузов. Эта модель описывает грузоперевозки на протяженном участке пути между двумя узловыми станциями. Четвертая модель описывает транспортные грузоперевозки по замкнутой цепочке станций.

Об одной начально-краевой задаче

Цветков Д.О.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Изучается задача о малых движениях системы из трех тяжелых несмешивающихся стратифицированных жидкостей, полностью заполняющих неподвижный сосуд. При этом нижняя и верхняя жидкости по отношению к действию силы тяжести считаются вязкими, а средняя – идеальной. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы.

Исключение уравнения Якоби в многомерных экстремальных вариационных задачах

Цыганкова А.В.

Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского (Симферополь, Украина)

Показано, что экстремальная задача для вариационного функционала Эйлера–Лагранжа в многомерной области может быть решена без использования уравнения Якоби. При этом один из двух возможных случаев не требует ограничения на меру области, во втором случае возникает ограничение на меру n–мерного прямоугольника, содержащего данную область. Задача рассмотрена как в классическом C^1—случае, так и в случае пространств Соболева $W^{1,p}$.

Задача составления оптимального графика работ

Землянухин М.Г., Чернышова Г.Д.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Рассматривается ситуация, когда существующий обязательный график назначений не обеспечивает необходимый объем заданных работ. В этом случае требуется дополнительное назначение работников. При этом желательно, чтобы каждому досталось минимальное число дополнительных рабочих дней. Такая проблема может быть описана задачей транспортного типа с несколькими критериями.

В работе предложены различные эквивалентные перезаписи математической модели, в результате чего появляется возможность использования алгоритма решения транспортной задачи с запретами и с ограничениями на пропускную способность.

О растяжении времени в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями

Чикрий Г.Ц.

ИК НАНУ Украины (Киев, Украина)

На основании принципа растяжения времени исследуется линейная дифференциальная игра с интегральными ограничениями на управления. Идея работы состоит в условии о факторизации на ресурсы управления, в котором в качестве фактора выступает некоторая функция времени. Выведены достаточные условия завершения игры за конечное время на основе специального способа построения текущего управления преследователя по управлению убегающего в прошлом. Приведен модельный пример.

Нетеровы краевые задачи для вырожденных дифференциально алгебраических систем

Чуйко С.М.

Славянский государственный педагогический университет (Славянск, Украина)

Найдены достаточные условия разрешимости нетеровой ($m \neq n$) краевой задачи для вырожденной ($k \neq n$) дифференциально-алгебраической системы [1,2]

$$A(t)\,\frac{dz}{dt} = B(t)z + f(t),\ A(t), B(t) \in \mathbb{R}^{k\times n}, \mathbb{C}[a,b],\ \ell z(\cdot) = \alpha,\ \ell z(\cdot) : \mathbb{C}[a,b] \to \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Предложенные условия разрешимости задачи (1) не предполагают существования центральной канонической формы [1] и совершенных троек матриц [2].

1. *Campbell S.L.* Singular Systems of differential equations. — San Francisco – London – Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.

2. *Бояринцев Ю.Е., Чистяков В.Ф.* Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования. — Новосибирск. — Наука. 1998. — 224 с.

Об ограниченности теплицевых операторов в весовых соболеских пространствах голоморфных функций

Шамоян Ф.А.

Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского (Брянск, Россия)

В работе исследуется ограниченность теплицевых операторов в весовых соболевских пространствах аналитических в полидиске функций.

Исследование устойчивости и периодических режимов перевернутого маятника с гистерезисным управлением

Шевлякова Д.В., Семенов М.Е.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

Представлена математическая модель стабилизации перевернутого маятника [1] с осциллирующим основанием, образованным физической системой поршень – цилиндр, трактуемой как гистерезисный преобразователь типа люфт [2]. В результате оценки мультипликаторов матрицы монодромии был найден критерий устойчивости вертикального положения маятника для параметров управляющего воздействия и построены двумерные проекции зон устойчивости трехмерного пространства параметров. Получены зависимости между начальными условиями и параметрами управления, обеспечивающими периодические колебания маятника. Построены области начальных значений в фазовом пространстве, соответствующие периодическим решениям.

Литература

(1) *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П. Л. Капица //ЖЭТФ 21. –1951. – С.588 – 597.

(2) *Красносельский М.А.* Системы с гистерезисом/ М.А. Красносельский, А.В. Покровский – М.: Наука. 1983. 271 с.

Краевые задачи для уравнения струны в весовых классах

Шишмарева Ю.Н.

Белгородский государственный университет (Белгород, Россия)

Рассматриваются различные постановки краевых задач типа Дирихле, Неймана и Дирихле-Неймана для одномерного волнового уравнения в области, выпуклой относительно характеристик. Предполагается, что граница области либо составленной из нехарактеристических гладких дуг, либо содержащей отрезок одной из характеристик. Получено достаточное условие однозначной разрешимости поставленных задач в весовых классах.

О возмущениях самосопряженных операторов локально подчиненными. Теоремы о базисности и о сравнении спектров

Шкаликов А.А.

МГУ им. Ломоносова (Москва, Россия)

В докладе будут рассмотрены возмущения самосопряженных или нормальных операторов с дискретным спектром. Будут продемонстрированы новые методы, которые позволяют получить теоремы о базисности и о сравнении спектров, когда известное условие глобальной p-подчиненности заменяется более слабым условием локального подчинения. Эффективность новых условий будет продемонстрирована на конкретных примерах.

Приложение субдифференциального исчисления к обобщённой задаче Штейнера

Шпилёв Р.О.

Таврический национальный университет (Симферополь, Украина)

Изучается обобщение задачи Штейнера на плоскости для трёх точек, состоящее в замене их кругами: требуется найти точку, сумма расстояний от которой до кругов будет минимальной. Для решения поставленной задачи использован метод субдифференциального исчисления, что позволило описать все возможные точки минимума негладкой функции суммы расстояний от точки плоскости до кругов. Рассмотрены все возможные случаи расположения точки Ферма треугольника центров кругов и в каждом случае доказано существование решения обобщённой задачи Штейнера. В каждом из случаев доказано существование минимальной сети и приведен алгоритм её построения.

Доказано, что рассмотрение в задаче Штейнера кругов вместо точек вносит значительные изменения в её решение. В частности, появляется ряд вырожденных случаев, порождённых спецификой условий задачи. Например, множество точек минимума может быть отрезком или областью на плоскости, что невозможно для классической задачи Штейнера.

Автор благодарит научного руководителя Ф. С. Стонякина за постановку задачи и полезные обсуждения.

Непрерывность спектральных характеристик и топологические радикалы

Шульман В.С.

Вологодский Государственный Технический Университет (Вологда, Россия)

Найдены новые условия на банаховы алгебры, обеспечивающие непрерывность спектра, спектрального радиуса и совместного спектрального радиуса. В частности, показано, что спектральный радиус (но не спектр) непрерывен на любой C*-алгебре типа 1. Доказательство использует теорию топологических радикалов.

Субаддитивные отображения, представления групп и функциональные уравнения

Шульман Е.В.

Вологодский государственный педагогический университет (Вологда, Россия)

Пусть G – группа, а Ω – произвольное множество. Назовем отображение $F : G \to 2^{\Omega}$ *субаддитивным*, если

$$F(gh) \subset F(g) \cup F(h) \quad \text{для всех} \quad g, h \in G.$$

Мы покажем, что

$$\left| \bigcup_{g \in G} F(g) \right| \le 4 \sup_{g \in G} |F(g)|,$$

где через $|M|$ обозначается мощность множества M.

Устанавливаются также аналоги этого неравенства для отображений со значениями в σ-алгебре измеримых подмножеств некоторого пространства с мерой и для отображений группы в решетку всех подпространств линейного пространства.

Результаты применяются к исследованию функциональных уравнений

$$f(g_1 g_2 \cdots g_n) = \sum_E \sum_{j=1}^{N_E} u_j^E v_j^E \tag{1}$$

где E пробегает все непустые собственные подмножества множества $\{1, 2, ..., n\}$, функции u_j^E зависят только от переменных g_i с $i \in E$, а функции v_j^E — от переменных g_i с $i \notin E$. Мы показываем, что каждая ограниченная непрерывная функция f на группе G, допускающая теорему сложения вида (1), является матричным элементом ограниченного конечномерного непрерывного представления группы G.

Распределение полюсов решений уравнения Пенлеве-4

Щелконогов А.А.

Челябинский Государственный Университет (Челябинск, Россия)

Речь идет о вычислении распределения полюсов решений уравнения Пенлеве IV $u'' = \frac{(u')^2}{2u} + \frac{3}{2}u^3 + 4xu^2 + 2(x^2 - a)u + \frac{b}{u}$ на основе представления решения в виде рациональной функции. Полюсы решения рассматриваются как заряженные кулоновские частицы во внешнем квадратичном потенциале $U = \sum(i)\frac{1}{2}(1-\delta)c_i(x_i)^2 + \sum(i \ne j)c_i c_j log(x_i - x_j)$. Здесь $x_i \in \mathbb{C}$ - координаты частиц-полюсов, δ - константа, c_i-заряды частиц. Функционал U варьируется по всем x_i, после чего получается система, которая решается численно.

К спектральному анализу оператора Шредингера с сингулярным потенциалом

Щербаков А.О.

Воронежский государственный университет (Воронеж, Россия)

С помощью метода подобных операторов исследуются спектральные свойства несамосопряженного оператора Шредингера с периодическим сингулярным комплекснозначным потенциалом $v \in H^{-1}_{loc,\pi}(\mathbb{R})$, таким что $v = w'$, $w \in L^4_{loc,\pi}(\mathbb{R})$. Рассматривается оператор, задаваемый квазидифференциальным выражением в пространстве $L^2[0,\pi]$ с введенным выше потенциалом и квазипериодическими граничными условиями вида $y(\pi) = e^{i\theta}y(0), y^{[1]}(\pi) = e^{i\theta}y^{[1]}(0)$, $\theta \in [0,\pi]$. Получены асимптотика спектра и оценки сходимости спектральных разложений возмущенного и невозмущенного операторов Шредингера с сингулярным потенциалом. Также доказана обобщенная спектральность рассматриваемого оператора.

Восстановление дифференциальных операторов с отклоняющимся аргументом

Юрко В.А.

Саратовский госуниверситет (Саратов, Россия)

Пусть $\{\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}$, $j = 0,1$ – спектр краевой задачи $L_j(q)$:

$$-y''(x) + q(x)y(x-a) = \lambda y(x),\ x \in (0,\pi),\ y(0) = y^{(j)}(\pi) = 0, \tag{1}$$

где $a \in (0,\pi)$, $q(x) \in L(a,\pi)$, и $q(x) \equiv 0$ при $x \in [0,a]$. Исследуется обратная задача восстановления потенциала $q(x)$ по спектрам задач $L_j(q)$, $j = 0,1$. Эта задача является обобщением классических обратных задач (см. [1]). Пусть $\{\tilde\lambda_{nj}\}_{n\geq 1}$, $j = 0,1$ спектр краевой задачи $\tilde L_j = L_j(\tilde q)$ с $\tilde q(x) \equiv 0$.

Теорема 1. *Если $\lambda_{nj} = \tilde\lambda_{nj}$ при всех $n \geq 1$, $j = 0,1$, то $q(x) = \tilde q(x)$ п.в. на (a,π).*

Пусть $N \in \mathcal{N}$ таково, что $aN < \pi \leq a(N+1)$, и для определенности $N = 2M+1$. При $M = 0$ теорема очевидна. При $M \geq 1$ доказательство состоит в последовательном применении следующих фактов.

Теорема 2. *Фиксируем $\nu = \overline{0, 2M-1}$. Если $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - \nu a/2, \pi)$, то $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - (\nu+1)a/2, \pi)$.*

Применяя теорему 2 последовательно при $\nu = 0, 1, \ldots, 2M-1$, получаем $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - Ma, \pi)$.

Теорема 3. *Если $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\pi - Ma, \pi)$, то $q(x) = 0$ п.в. на интервале $((M+2)a/2, \pi)$.*

Теорема 4. *Фиксируем $\nu = \overline{5, M+2}$. Положим $s := [(\nu+1)/2]$. Если $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(\nu a/2, \pi)$, то $q(x) = 0$ п.в. на интервале $(sa/2, \pi)$.*

Применяя теорему 4, начиная с $\nu = M+2$, получаем $q(x) = 0$ п.в. на (a, π).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Национального научного совета Тайваня (проекты 10-01-00099 и 10-01-92001-ННС).

1. Юрко В.А. *Введение в теорию обратных спектральных задач.* - М.: Физматлит, 2007.

Об интегрируемых представлениях виковского аналога CCR

Якымив Р.Я.

Национальный Университет Биоресурсов и Природопользования Украины (Киев, Украина)

Мы изучаем класс интегрируемых $*$-представлений деформации виковского аналога алгебры канонических коммутационных соотношений с двумя степенями свободы. А именно, мы определяем понятие интегрируемого представления нашей алгебры и описываем классы унитарной эквивалентности неприводимых интегрируемых представлений.

Bounded and periodic solutions of Schrodinger's equation

Boichuk A.A., Pokutnyi O.O.

Institute of mathematics of NAS of Ukraine (Kiev, Ukraine)

The report is devoted to obtaining necessary and sufficient conditions for existence of bounded solutions of differential equations in the Hilbert space $\mathbf{H}$

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = \lambda J H(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \lambda J H(t)\varphi(t) + f(t), \tag{2}$$

under assumption that the homogeneous equation ($f(t) = 0$) admits an exponential dichotomy on both semi-axes R_+ and R_- with projector-valued functions $P_+(t)$ and $P_-(t)$ (see [1]), and boundary-value problem (1) with condition

$$\varphi(0,\varepsilon) - \varphi(w,\varepsilon) = \alpha, \alpha \in D \tag{3}$$

where $H(t) = H^*(t)$ - linear unbounded self-adjoint operator $H^{\frac{1}{2}}(t) \geq \beta I, \beta > 0$ with domain $D(\mathbf{H}(\mathbf{t})) = D \subset \mathbf{H}, \overline{D} = \mathbf{H}$, $J^2 = -I$, ε - is a fixed parameter. Evolution operator $U(t,\lambda)$ of (1),(2) for $\varepsilon = 0 (f(t) = 0)$, is strongly continuous nonexpanding group and the family of bounded solutions of (2) in this case has the form

$$\varphi_0(t,c) = U(t,\lambda)\mathcal{P}_{N(D)}c + (G[f])(t), \tag{4}$$

or solutions of (2), (3)

$$\varphi_0(t,\varepsilon = 0, c) = U(t,\lambda)U_0(w,\lambda)c + (G[f,\alpha])(t), \forall c \in \mathbf{H}, \tag{5}$$

where

$$U_0(w,\lambda) = U_0^2(w,\lambda) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} U^k(w,\lambda)}{n}$$

- averaging operator of monodromy operator $U(w,\lambda)$, $(G[\cdot])(t)$ - is generalized Green's operator, $D = P_+(0) + (I - P_-(0))$. We find bounded solutions of (1) or solutions of (1),(3) such that for $\varepsilon = 0$ generate in one of the solutions of (4) or (5) [1]. Necessary and sufficient conditions for existence of bounded solutions of (1) or solutions of (1), (3) are obtained using the operator equation for generating constant

$$F(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\tau,\lambda) Z(\varphi_0(\tau,0,c),\tau,0)d\tau = 0,$$

or equation for generating amplitudes

$$F(c) = \int_0^w U_0(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)Z(\varphi_0(\tau,0,c),\tau,0)d\tau = 0.$$

[1] *Pokutnyi O.O.* Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in Banach space with unbounded linear part, Differential equations №6, v.48, 2012 (in Russian).- p.803 - 813.

On a generalized trigonometrical moment problem denerated by boundary value problems for PDEs

Burskii V.P.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU (Donetsk, Ukraine)

The report is devoted to a connection between ill-posed boundary value problems in a bounded domain for a PDE that isn't proper elliptic and a new moment problem on a curve, which can be called generalized trigonometric.

Consider the following moment problem: $\int_{\partial\Omega}\alpha(s)(x(s)\cdot\tilde{a}^j)^N ds=\mu^j_N;\ j=1,2;\ N\in\mathbb{Z}_+,$ where on two given vectors $\tilde{a}^j\in\mathbb{C}^2$ and on two sequences of numbers μ^j_N it is found the function α. Obviously, for the case when $\partial\Omega$ is the unit circle and vectors $\tilde{a}^j$, $j=1,2$ are equal $\tilde{a}^1=(1,i);\tilde{a}^2=(1,-i)$ this moment problem turn on well-known trigonometric moment problem because then $(x(s)\cdot\tilde{a}^j)^N=\exp(\pm iN)$.

Among a lot of problems connected with above moment problem we will consider the problem of indeterminacy (uniqueness): for what curve $\partial\Omega$ and vectors $\tilde{a}^j$, $j=1,2$ there exists a function α such that

$$\forall N\in\mathbb{Z}_+,\ j=1,2,\ \int_{\partial\Omega}\alpha(s)(x(s)\cdot\tilde{a}^j)^N ds=0. \qquad (1)$$

Consider also the equation that we will write down as

$$(\nabla\cdot a^1)(\nabla\cdot a^2)u=0, \qquad (2)$$

where $a^j=(a^j_1,a^j_2), j=1,2$ are unit complex vectors and $\tilde{a}^j\cdot a^j=0$.

Statement 1. Let $m\geq k\geq 3$ and let we have three sets of statements:

1_m) The problem (1) has a nontrivial solution $\alpha\in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$.

2_k) The Dirichlet problem $u|_{\partial\Omega}=0$ for (2) has a nontrivial solution $u\in H^k(\Omega)$.

3_k) The Neumann problem $u'_{\nu_*}|_{\partial\Omega}=0$ for (2) has a solution $const\neq u\in H^k(\Omega)$.

Then $1_m)\Rightarrow 2_{m-q});\ 1_m)\Rightarrow 3_{m-q});\ 2_m)\Rightarrow 1_m);\ 3_m)\Rightarrow 1_m)$ with $q=1+0$ (By definition, for bounded domain $H^{k+0}(\Omega)=\bigcup_{\epsilon>0}H^{k+\epsilon}(\Omega)$).

We have a full answer on above problems in the cases when the boundary is an ellipse or a bi-quadratic algebraic curve $F(x,y):=\sum^2_{i,k=0}a_{ik}x^iy^k=0$. This answer is given in terms of coefficients of curve equation and vectors a^j. Thus, for the unit disk $K:=\Omega$ the problem (1) has a nontrivial solution iff the number φ_0/π is a rational number, here $\varphi_0=\varphi_1-\varphi_2$, $\operatorname{tg}\varphi_j=a^j_2/a^j_1$. Properties of nonhomogeneous boundary value problems are characterized by properties of the problem (1) also.

Let M^j_l be a subspace of a Sobolev space $H^l(\partial\Omega)$ for what the equality (1) is fulfilled and let $H^m_\rho(\partial\Omega)$ be a weight Sobolev space which is built by vectors a^j for improperly elliptic equation (2). Let's say that vectors $\widetilde{a}^1,\widetilde{a}^2\in\mathbb{C}^2$ have $H^m_\rho-H^l$-property on the curve $\partial\Omega$, $l\leqslant m$, if for any $\alpha\in H^m_\rho(\partial K)$ exist there unique functions $\alpha^1\in M^1_l$, $\alpha^2\in M^2_l$ such that $\alpha=\alpha^1+\alpha^2+const$. Then, for example, the Dirichlet problem $u|_{\partial K}=\psi$ in the unit disk K has an unique solution $u\in H^l(K)$ if $\psi\in H^l_\rho(K)$ and vectors $\widetilde{a}^1,\widetilde{a}^2\in\mathbb{C}^2$ have $H^m_\rho-H^l$-property on the curve ∂K. The last can be full characterized also.

Some results on the equation of the ocean and the atmosphere

Dostoglou S.

Department of Mathematics University of Missouri (Columbia, USA)

The existence of a unique invariant measure for the equations of the ocean/atmosphere is important to physical applications. We will report on recent progress for the barotropic equations on the 2-sphere and for the primitive equations on a 3-dimensional domain with boundary. In both cases the equations are perturbed using white noise.

Numerical methods of computing eigenvalues of matrix, which arising out of some biological models

Eleuov A.A., Eleuova R.A., Nazarbekova K.T., Bekbaeva M.K.

Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

In this dissertation work [1] we proposed different algorithms of computing eigenvalues and eigenvectors of matrices, which based on variational methods. These methods were applied to some ecnomic problems too. In this thesis we propose the use of these algorithms to some biological problems.

The detailing of populations of age structures provides to model classes, first proposed by Leslie (1945, 1948). Let the food resources are unlimited. The reproduction occurs in certain moments of time $t_1, t_2 ...., t_n$. Let the population contains n age groups. Then at each fixed time (for example, t_0) the population can be characterized with column vector:

$$X(t_0) = \begin{vmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ ... \\ x_n(t_0) \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Vector$X(t_1)$, which characterizing the population in the next moment of time, for example, within a year, associated with the vector $X(t_0)$ by the matrix transition L:

$$X(t_1) = LX(t_0). \tag{2}$$

Let's establish the type of matrix. From all age groups we select those groups, that produce offspring. Let their number will k, $k+1$, ..., $k+p$, under x_1, ..., x_{k-1} are pioneers, x_{k+p+1}, ..., x_n are pensioners. Knowing the structure of the matrix L and the initial state of the population of column vector $X(t_0)$, we can predict the state of the population in any given time. The main eigenvalues of the matrix L gives the rate, at which the population multiplies, when the age structure is stabilized. The models of using the Leslie's matrices for big age groups can provide a description of the vibrational changes of the population size. In this thesis for the computing of eigenvalues of the matrix L was used the author's algorithm for the reducing of matrix to the triangle form. [3]. Note, that this algorithm can be also used for other similar problems, which arise not only in the mathematical modeling of biological processes, but also in other areas.

References

[1] Eleuov A.A. Variational methods of computing eigenvalues and eigenvectors of matrices and their numerical implementation // Ph. D. Thesis. –2007. –Almaty.

[2] Eleuov A.A. The use of a method for the approximate determinated of the eigenvalues of the economic problems. // Proceedings of V-th Kazakh-Russian international scientific-practical conference «Mathematical modeling of science-technolical and ecological problems in the petroleum industry», - Atyrau, 2005. - C. 53-56.
[3] Eleuov A.A. The algorithms of the count of eigenvalues and eigenvectors of matrices. // Vestnik KazNPU named after Abay. The seria of physics, mathematic, computer science. – 2007. – №1(17). – C.23-28.

Newton polyhedron and estimates for differential operators

Karol A.I.

St. Petersburg State University (St. Petersburg, Russia) [0]

We consider the differential operator $P = P(x, D_x) = \sum\limits_{\alpha} p_\alpha(x) D^\alpha$ with C^∞ - coefficients in a bounded domain $\Omega \in R^d$. We construct the calculus of pseudodifferential operators connected with the Newton polyhedron of the operator (symbol) $P(x, \xi)$.

The faces of Newton polyhedron determine a partition of the cotangent space $\Omega \times R^d$. In each domain the leading part of the operator corresponds to the face of the polyhedron. If the Newton polyhedron doesn't have $(d-1)$-dimensional faces parallel to coordinate axes, then the variant of the usual Hormander classes $S^m_{\rho,\delta}$ can be used. In this case the nondegeneracy of the symbol is equivalent to the hypoellipticity of the operator. This case was considered by Volevitch and Gindikin in [1].

If the Newton polyhedron contains a face parallel to a coordinate axis, the operator P should be microlocally considered as a differential operator with operator-valued coefficients and the technique of the pseudodifferential operators with operator-valued symbols should be used.

As a simple corollary we get the Garding inequality for the operator P, i.e. describe the derivatives dominated by the quadratic form of the operator P.

1. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. Многогранник Ньютона и локальная разрешимость линейных дифференциальных уравнений в частных производных, Труды Моск. Матем. Об-ва, 1985, т.42,с.211-262.

2. A.I.Karol'. Newton Polyhedra and Estimates for Differential Operators. Proceedings of the St.Petersburg Math. Soc., vol 13. Amer.Math. Soc.Transl. (ser.2), 2008, vol.222, pp.43-59.

Strict and bistrict operators in spaces with G-metric

Azizov T., Khatskevich V., Senderov V.*

*Braude College (Karmiel, Israel)

In what follows, we use the definitions and the notation of [1].

Definition 1. *Let $\mathfrak{H}_1$ be a separable J-space, and let $\mathfrak{H}_2$ be a separable G-space, $\dim \mathfrak{H}_1^+ = \dim \mathfrak{H}_2^+ = \infty$. An operator $A\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ is called a bistrict plus-operator if A and $A^c = JA^*G$ are strict plus-operators, and it is called a *-bistrict plus-operator if A and A^* are strict plus-operators.*

In this report, we formulate exact conditions (on the structure and the spectrum of the operator G) for the pair $(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ of (indefinite or definite) spaces to contain either ( ) strict or (b) bistrict or (б) *-bistrict plus-operators.

[0]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 10-01-00154а и гранта СПбГУ 6.38.64.2012

In the second part of this report, we use inclusions relating the classes of bistrict and *-bistrict plus-operators (for fixed $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$).

Each *-bistrict plus-operator is bistrict. In the terms of the structure and the spectrum of G, we formulate exact conditions for the classes under study to coincide.

The research of T. Ya. Azizov was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant no. 12-01-00102-a.

References

[1] Azizov T.Ya, Iokhvidov I. S. *Foundations of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric*// Nauka, Moscow, 1986.

Stabilization of a Flexible Beam With Distributed Actuators

Kucher J.I., Zuyev A.L.

Institute of Applied Mathematics and Mechanics National Academy of Sciences of Ukraine (Donetsk, Ukraine)

The problem of stabilization of a system that consists of a simply supported flexible beam with attached piezoelectric actuators and sensors is solved in this presentation. Mathematical model of such mechanical system is an abstract Cauchy problem in an infinite dimensional state space. A control functional that provides asymptotic stability of the trivial solution is constructed. The stability is proved with the help of the C_0–semigroups theory and direct Lyapunov method.

Conditions for a function that describes geometrical features of the piezoactuator are obtained.

Long-time behavior of the solution to the mkdv equation with the step like initial data

Minakov A.

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering (Kharkov, Ukraine)

The step-like problem to the modified Korteweg-de Vries equation is studied. It is shown that for the positive long times asymptotic behavior of the solution is described by a modulated elliptic wave while for the negative long times it is a rarefaction wave.

Volterra equations in dynamical systems modelling[1]

Sidorov D.

Energy Systems Institute SB RAS and Irkutsk State University (Irkutsk, Russia)

The method for solution to the Volterra integral equations of the first kind is proposed. Such equations appear in the theory of evolving dynamical systems and they have kernels with discontinuities of the first kind. The characteristic algebraic equation is constructed. Analytically and numerically we study the regular case when characteristic equation has no natural roots and the solution to the integral equation is unique. If characteristic equation has natural roots then solution contains arbitrary constants. We prove existence theorems and construct their asymptotics. The theoretical results are illustrated by numerical calculations.

---

[1]This work is supported by RFBR No. 11-08-00109-a, it is fulfilled within FCP project 2012-1.2.2-12-000-1001-012

Solvability of the Vlasov–Poisson Equations with External Magnetic Field

Skubachevskii A.L.

Peoples' Friendship University of Russia (Moscow, Russia)

We consider the Vlasov–Poisson system of equations describing the evolution of distribution functions of the density for the charged particles in a rarefied plasma. We study the Vlasov–Poisson system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ with initial conditions for distribution functions $f^\beta\big|_{t=0} = f^\beta_0(x,p)$, $\beta = \pm 1$, and the Dirichlet or Neumann boundary conditions for the potential of an electric field for $x_1 = 0$, where $f^\beta_0(x,p)$ is the initial distribution function (for positively charged ions if $\beta = +1$ and for electrons if $\beta = -1$) at the point x with impulse p, $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > 0\}$. Assume that initial distribution functions are sufficiently smooth and $\operatorname{supp} f^\beta_0 \subset (\mathbb{R}^3_\delta \cap B_\lambda(0)) \times B_\rho(0)$, $\delta, \lambda, \rho > 0$, and the magnetic field $H(x)$ is also sufficiently smooth and has a special structure near the boundary $x_1 = 0$, where $\mathbb{R}^3_\delta = \{x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 > \delta\}$. Then we prove that for any $T > 0$ there is a unique classical solution of the Vlasov–Poisson system in $\mathbb{R}^3_+ \times \mathbb{R}^3$ for $0 < t < T$ if $\|f^\beta_0\| < \varepsilon$, where $\varepsilon = \varepsilon(T, \delta, \lambda, \rho, \|H\|)$ is sufficiently small.

This work was supported by the RFBR (grant No. 10-01-00395).

Asymptotic Analysis of Probabilistic Integrals in Infinite Dimensions

Steblovskaya V.

Department of Mathematical Sciences, Bentley University (Boston, USA)

The Laplace method was one of the first asymptotic methods enabling one to obtain an exact asymptotics as $\lambda \to \infty$ of integrals of the type:

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda S(x)} f(x)dx. \tag{1}$$

If the function S has finitely many minimum points on $[a,b]$, then under some regularity conditions the main contribution to the asymptotics of (1) is made by the sum of integrals over sufficiently small neighborhoods of the minimum points of S.

Even in its simplest one-dimensional form, the Laplace method has found numerous applications in mathematics itself, as well as in mechanics, statistical physics, and other natural sciences.

Rigorous generalization of the Laplace method to the case of multiple integrals turned out to be non-trivial and required more complex methods and techniques (see e.g. [Fe]).

A natural yet challenging problem is the extension of (1) to the infinite dimensional case, namely to integrals of the form:

$$I(\lambda) = \int_H e^{-\lambda S(x)} f(x)\mu(dx), \tag{2}$$

where H is a real separable Hilbert space. We recall that there exists no Lebesgue measure in an infinite-dimensional space, and one has to replace a Lebesgue measure with some sigma-additive measure on H. A commonly used example of such a sigma-additive measure is a Gaussian measure.

We will present a survey of recent results on asymptotic analysis of integrals of type (2) (see e.g. [PiFa], [ElRo], [AlSt], [AlSt1]).

References

[AlSt] S. Albeverio and V. Steblovskaya, Asymptotics of Infinite-Dimensional Integrals with Respect to Smooth Measures I, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **2**, 4, 1999, 529-556.

[AlSt1] S. Albeverio and V. Steblovskaya, Asymptotic Analysis of Probabilistic Integrals in Infinite Dimensions, in preparation.

[ElRo] R.Ellis and J.Rosen, Asymptotic Analysis of Gaussian Integrals. I. Isolated Minimum Points, *Trans. of the Amer. Math. Soc.*, **273**, 2, 1982, 447-481.

[Fe] M.Fedoriuk, "Asymptotics. Integrals and Series," Nauka, 1987 (in Russian).

[PiFa] V. I. Piterbarg and V. R. Fatalov, The Laplace Method for Probability Measures in Banach Spaces, *Russian Math. Surveys*, **50**, 6, 1995, 1151–1239.

Comparison of linear operators

Trigub R.M.

Donetsk National University (Donetsk, Ukraine)

We present several new inequalities for convolution type operators and discuss some applications of these results. The latters include: New sufficient condition for presentation of function by absolutely convergent Fourier integral; Sharp degree (exact order) of approximation by convolution with odd power of Dirichlet kernal; Sharp inequalities between integral norms of differential operators with constant coefficients. We also intend to discuss some problems concerning a new type of radial basis functions.

References

[1] R. M. Trigub, E. S. Belinsky Fourier Analysis and Approximation of Functions. ππS Kluwer-Springer. 2004.

[2] E.Liflyand, S.Samko and R.Trigub,The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals:an overviev,Analysis and Math.Physis, Springer,2:1(2012),p.1-68

[3] R. M. Trigub, Exast order of approximation of periodic functions by linear polynomial operators, East J. Appr., 15:1 (2009),P. 25-50.

[4] E. Liflyand and R. Trigub, Conditions for the absolute convergence of Fourier integrals ,J.Appr.Theory.,163(2011),p.438-459

[5] R. M. Trigub, On Comparison of Linear Differential Operators, Mathem. Zametki. 82 (2007),P. 426-440 (Russian).

Spectral analysis and correct solvability of the abstract integro-differential equations

Vlasov V.V.

Moscow State University (Moscow, Russia)

We study the spectra of the operator-valued functions which are the symbols of abstract integro-differential equations in a Hilbert space. We analyze the integro-differential equations arising in applications (Gurtin-Pipkin type equations describing the process of heat propagation in media with memory, integro-differential equations arising in the theory of viscoelasticity). We study the representations of the solutions of these equations as a series of exponentials, obtained on the base of structure and asymptotic of the spectra of operator-valued functions mentioned above.

Recovering Differential Operators with Delay

Yurko V.

SARATOV STATE UNIVERSITY (SARATOV, RUSSIA)

Let $\{\lambda_{nj}\}_{n\ge1}$, $j=0,1$, be the eigenvalues of the boundary value problems $L_j(q)$:

$$-y''(x)+q(x)y(x-a)=\lambda y(x),\ x\in(0,\pi),\ y(0)=y^{(j)}(\pi)=0,$$

where $a\in(0,\pi)$, $q(x)\in L(a,\pi)$, and $q(x)\equiv 0$ for $x\in[0,a]$. Let $\{\tilde\lambda_{nj}\}_{n\ge1}$, $j=0,1$, be the eigenvalues of the boundary value problems $\tilde L_j=L_j(\tilde q)$ with $\tilde q(x)\equiv 0$.

Theorem 1. *If* $\lambda_{nj}=\tilde\lambda_{nj}$ *for all* $n\ge1,\ j=0,1,$ *then* $q(x)=\tilde q(x)$ *a.e. on* (a,π).

Let $N\in\mathcal{N}$ be such that $aN<\pi\le a(N+1)$, and let for definiteness $N=2M+1$. For $M=0$ the theorem is obvious. For $M\ge1$, the proof consists of applying successively the following facts.

Theorem 2. *Fix* $\nu=\overline{0,2M-1}$. *If* $q(x)=0$ *a.e. on the interval* $(\pi-\nu a/2,\pi)$, *then* $q(x)=0$ *a.e. on the interval* $(\pi-(\nu+1)a/2,\pi)$.

Applying Theorem 2 successively for $\nu=0,1,\dots,2M-1$, we obtain $q(x)=0$ a.e. on the interval $(\pi-Ma,\pi)$.

Theorem 3. *If* $q(x)=0$ *a.e. on the interval* $(\pi-Ma,\pi)$, *then* $q(x)=0$ *a.e. on the interval* $((M+2)a/2,\pi)$.

Theorem 4. *Fix* $\nu=\overline{5,M+2}$. *Denote* $s:=[(\nu+1)/2]$. *If* $q(x)=0$ *a.e. on the interval* $(\nu a/2,\pi)$, *then* $q(x)=0$ *a.e. on the interval* $(sa/2,\pi)$.

Applying Theorem 4 several times successively starting from $\nu=M+2$, we arrive at the relation $q(x)=0$ a.e. on (a,π).

Acknowledgment. This research was supported in part by Grants 10-01-00099 and 10-01-92001-NSC of Russian Foundation for Basic Research and Taiwan National Science Council.

REFERENCES

[1] Freiling G. and Yurko V.A. Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications. NOVA Science Publishers, New York, 2001.

Список авторов

Конференция проводится ежегодно с 17 по 29 сентября.

Ежегодно издаются Труды КРОМШ (выпуски журнала “Spectral and Evolution Problems”), аннотации лекций и статьи участников конференции публикуются в научных журналах Украины и России. Требования к оформлению аннотаций и статей в Труды КРОМШ-2013 будут опубликованы на официальном сайте конференции **www.kromsh.info**.

Официальные языки конференции: украинский, русский, английский.

Заявки на участие в работе КРОМШ-2013 принимаются до 1 июля 2013 года через официальный сайт конференции **www.kromsh.info**.

Обязательное подтверждение участия с датами приезда и отъезда необходимо прислать с 20 августа по 5 сентября 2013 года по адресу **kromsh@mail.ru**.

Оргкомитет КРОМШ

Копачевский Николай Дмитриевич (kopachevsky@list.ru)

Марянин Борис Давыдович
Муратов Мустафа Абдурешитович (mustafa_muratov@mail.ru)
Орлов Игорь Владимирович (igor_v_orlov@mail.ru)
Пашкова Юлия Сергеевна (j_pashkova@mail.ru)
Смирнова Светлана Ивановна (old@crimea.edu)
Старков Павел Александрович (pavelstarkov@list.ru)
Войтицкий Виктор Иванович (victor.voytitsky@gmail.com)